POLITECNICO DI MILANO

Le molle

Costruzione di Macchine 2 – Prof. Stefano Beretta

Chiara Colombo

Le molle

Le molle sono elementi in grado di deformarsi elasticamente, assorbendo energia.

Applicazioni caratteristiche:

- accumulatore di energia per il comando di piccoli meccanismi;
- dispositivi di attenuazione delle vibrazioni;
- generazione di forze di valore controllato;
- misura di forze;
- realizzazione di sistemi vibranti con frequenza assegnata.

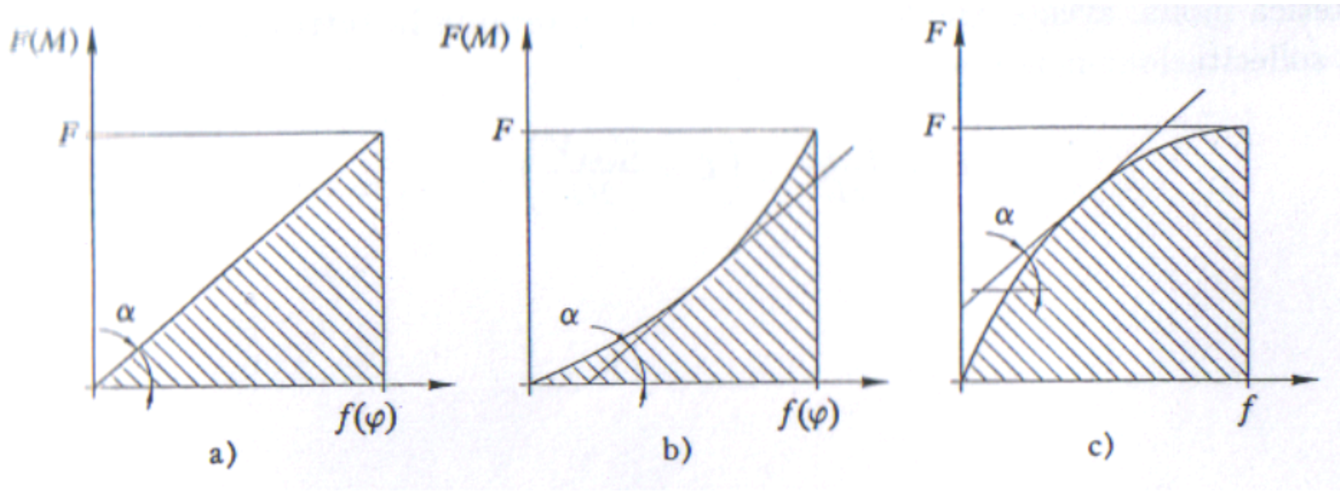
La **curva caratteristica** di una molla è generalmente definita in funzione della forza esterna applicata, P, e dello spostamento del punto di applicazione del carico, la freccia f:

$$P = P(f)$$

La **rigidezza** della molla è definita come:

$$K = dP/df$$

Caratteristica: lineare, dura o dolce



Nel caso lineare, la rigidezza della molla K è costante.

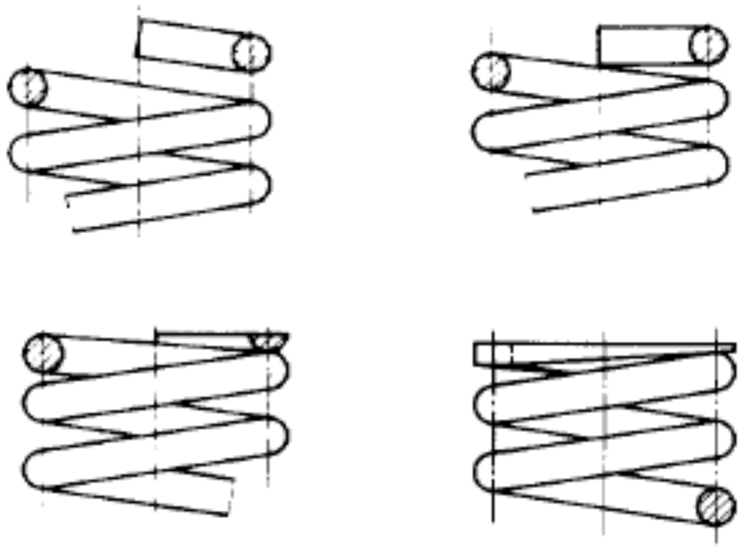
Le molle

Nelle molle ad elica cilindrica la caratteristica di sollecitazione prevalente per ogni sezione e' il momento torcente.

E' più diffuso il tipo di molla detto a compressione, in quanto il collegamento tra molla ed elementi del meccanismo è molto semplice: le estremità della molla vanno opportunamente lavorate in modo da presentare superfici di estremità piane.

Alcune configurazioni (UNI 7900-1):

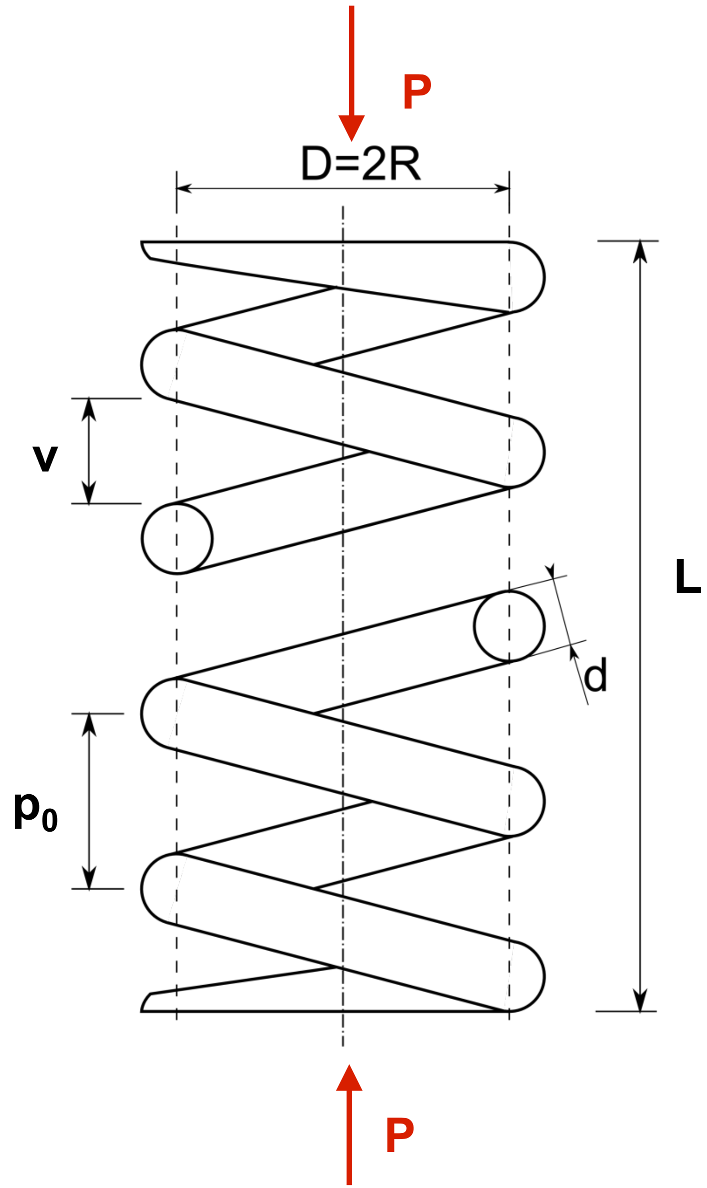
- Aperta
- Chiusa
- Chiusa e molata
- Rastremata, chiusa e molata



Le molle: considerazioni geometriche

Simboli:

- d = diametro del filo della molla
- D = 2R = diametro del cilindro sul quale è avvolto l'asse del filo della molla
- α = angolo di avvolgimento = 5÷6°
- $p_0 = 2\pi R \tan\alpha$ = passo della molla scarica
- P = forza sull'asse della molla
- $v = p_0 - d$ = passo interspira a molla scarica
- i = numero di spire e frazioni di spira attive
- $l = 2\pi Ri$ = lunghezza del filo

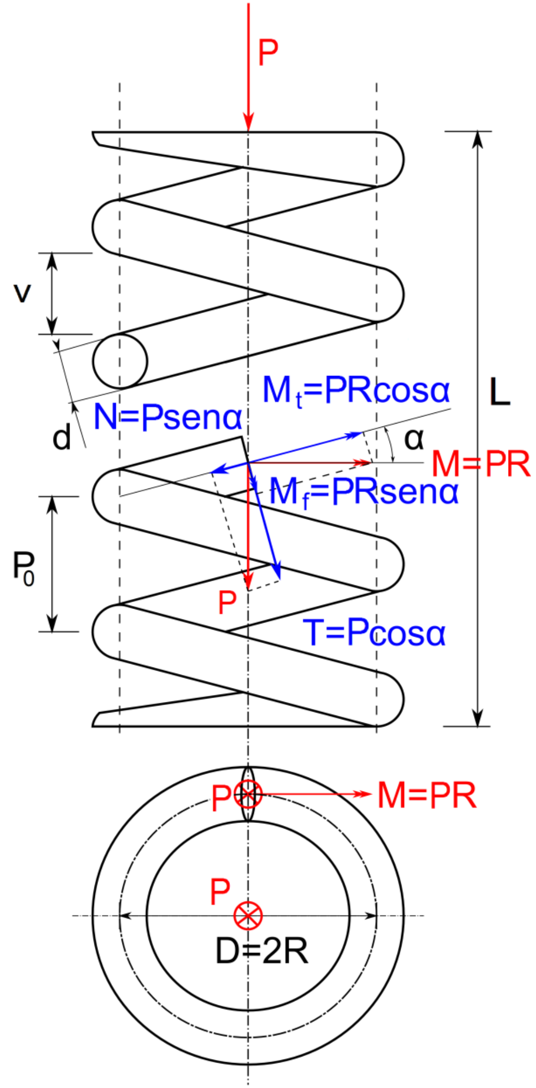


$N = P\sin\alpha;$ Azione assiale

$T = P\cos\alpha;$ Taglio

$M_t = PR\cos\alpha;$ Momento torcente

$M_f = PR\sin\alpha;$ Momento flettente



$\alpha :=$ angolo di avvolgimento dell'elica media

1) α in generale piccolo

$\cos\alpha \approx 1$

$\sin\alpha \approx 0$

$N = P\sin\alpha \approx 0$

$T = P\cos\alpha \approx P$

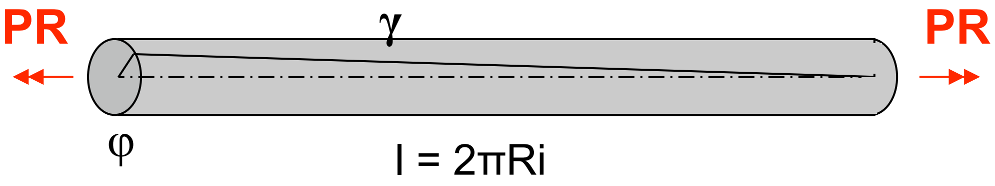
$M_t = PR\cos\alpha \approx PR$

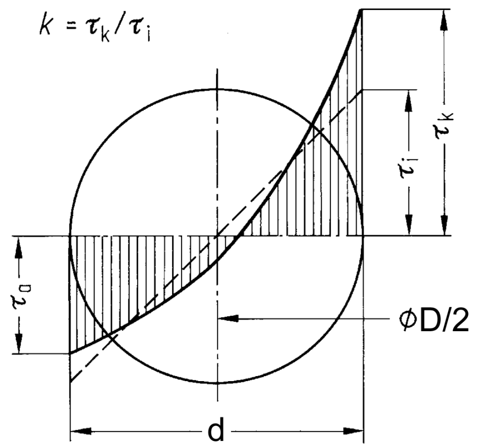
$M_f = PR\sin\alpha \approx 0$

Le molle: considerazioni sugli sforzi

Si definisce rapporto caratteristico c: = D/d

2) Si ipotizza che **c ≥ 10**, cioè il filo è piccolo rispetto al diametro di avvolgimento dell'elica (curvatura piccola). In questo modo si può trattare il problema come una barra di torsione.





$$\tau_{max} = \frac{M_t \cdot d}{2 \cdot J_p} = \frac{M_t \cdot d}{2 \cdot \frac{\pi d^3}{32}} = \frac{16PR}{\pi d^3}$$

γ = scorrimento sulla superficie esterna del cilindro $= \frac{\tau}{G}$

φ = rotazione della sezione di estremità $= \gamma \cdot \frac{2\pi R \cdot i}{\frac{d}{2}} = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{4\pi R \cdot i}{d} = \frac{16PR}{G\pi d^3} \cdot \frac{4\pi R \cdot i}{d} = \frac{16c^2 Pi}{Gd^2}$

Le molle: considerazioni energetiche

Determinazione della freccia dall'energia interna:

Clapeyron:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{(PR\cos\alpha)^2}{GJ_P}dl = \frac{1}{2}\frac{P^2R^2L}{GJ_P}$$

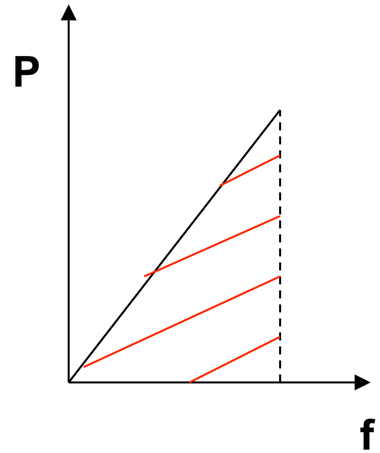
La derivata dell'energia U rispetto il carico P è la freccia:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PR^2(\cos\alpha)^2 L}{GJ_P} = \frac{P\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2\cdot(\pi Di)}{G\cdot\left(\frac{\pi d^4}{32}\right)} = \frac{8PD^3 i}{Gd^4} = \frac{8Pi}{Gd}\left(\frac{D^3}{d^3}\right) = \boxed{\frac{8Pc^3 i}{Gd} = f}$$

Si poteva anche valutare la freccia dal bilancio del lavoro interno-esterno:

Lavoro interno $$L_e = \frac{P\cdot f}{2}$$

Lavoro esterno $$L_i = \frac{M_t\cdot\varphi}{2}$$



Le molle: considerazioni energetiche

Da bilancio Le = Li si può ottenere:

$$\frac{P \cdot f}{2} = \frac{P \cdot R}{2} \cdot \frac{16c^2 Pi}{Gd^2} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{8c^3 Pi}{Gd}$$

Dalla valutazione della freccia, si possono stimare anche:

la rigidezza della molla $K = \dfrac{P}{f} = \dfrac{Gd}{8c^3 i}$

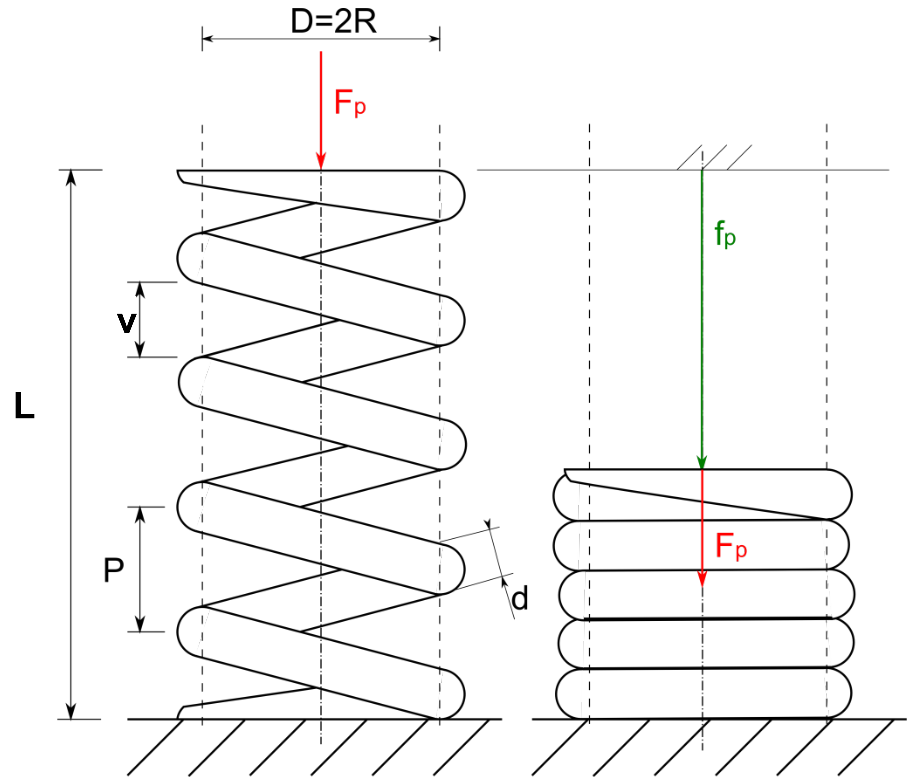
il numero di spire attive $i = \dfrac{Gd}{8c^3 K}$

Per un corretto dimensionamento, occorre assicurarsi che per effetto del carico P la molla non vada a pacco: $f_{(m)} \leq f_p$

$$\frac{8c^3 i}{Gd} \cdot P < i \cdot v = i \cdot (2\pi R \cdot \tan\alpha - d)$$

$$8c^3 mg < (\pi \cdot c \cdot \tan\alpha - 1) \cdot Gd^2$$

$$m < m_p = \frac{(\pi \cdot c \cdot \tan\alpha - 1) \cdot Gd^2}{8g \cdot c^3}$$



Condizione finale di dimensionamento:

m_p = 2÷2.5 m

Le molle: considerazioni di dimensionamento

Occorre infine tenere conto anche della condizione di resistenza:

$$\frac{\tau_{\lim}}{\tau_{\max(pacco)}} = \eta$$

dove: η > *1.25* per garantire sicurezza

η < *1.5* per evitare sovra-dimensionamento

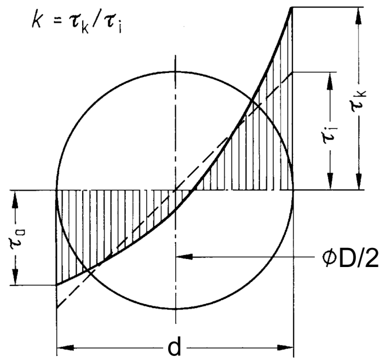
$$\tau_{\lim} = \tau_{sn} = \frac{R_m}{\sqrt{3}}$$

$$\tau_{\max(pacco)} = \frac{16M_{t(pacco)}}{\pi d^3} = \frac{16K \cdot f_p \cdot R}{\pi d^3} = \frac{16\dfrac{Gd(\pi c \cdot \tan\alpha - 1)}{8c^3 i} diR}{\pi d^3} = \frac{2GR(\pi c \cdot \tan\alpha - 1)}{\pi c^3 d}$$

$$\tau_{\max(pacco)} = \frac{G(\pi c \cdot \tan\alpha - 1)}{\pi c^2}$$

Le molle: verifica considerando curvatura e taglio

Se **c** $\leq$ **10** il filo non è piccolo rispetto al diametro di avvolgimento dell'elica e l'ipotesi di curvatura piccola non è verificata. In questo caso, occorre considerare la molla non più come una trave ad asse rettilineo, ma occorre considerare la curvatura e il taglio.



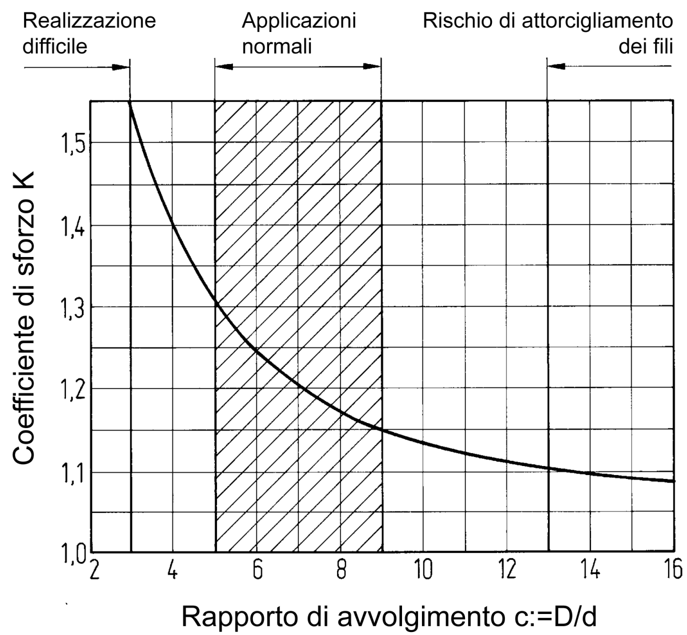
Sforzo tangenziale effettivo τ :

$$\tau = k\tau_{Mt};$$

dove k tiene conto degli effetti della curvatura e del taglio

formula di Wahl:

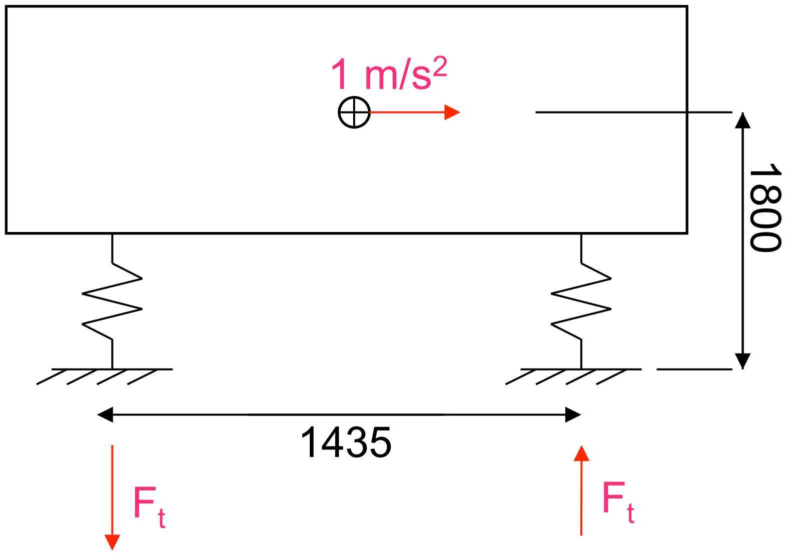
$$k = \frac{4c-1}{4(c-1)} + \frac{0.615}{c};$$



Le molle: verifica a fatica

Perché la fatica?

- Irregolarità del percorso ferroviario (sconnessioni, irregolarità della sede ferroviaria …)
- Curva del treno

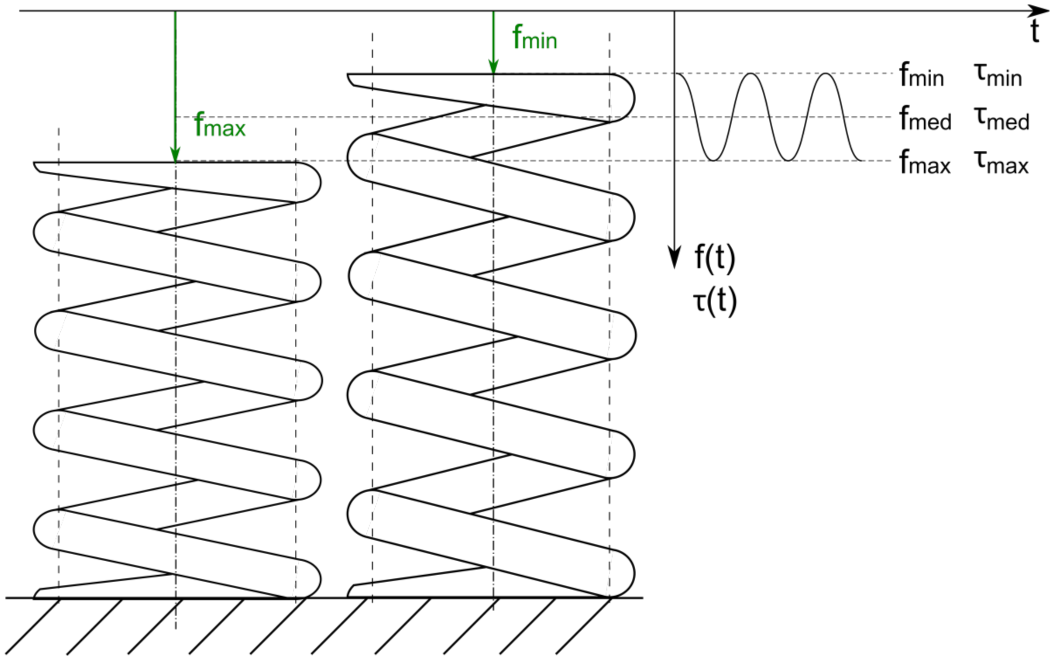


Le molle: verifica a fatica

Freccia minima e massima della molla:

$$f_{max} = 0.75 f_p;$$

$$f_{min} = 0.45 f_p;$$



$$\tau(t) = \frac{8}{\pi}\frac{c}{d^2} kKf(t);$$

$$\tau_{max} = \frac{8}{\pi}\frac{c}{d^2} kKf_{max} = 0.75\frac{8}{\pi}\frac{c}{d^2} kKf_p;$$

$$\tau_{min} = \frac{8}{\pi}\frac{c}{d^2} kKf_{min} = 0.45\frac{8}{\pi}\frac{c}{d^2} kKf_p;$$

$$\tau_{med} = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2};$$

$$\tau_{alt} = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2};$$

$k :=$ coefficiente di Wahl;

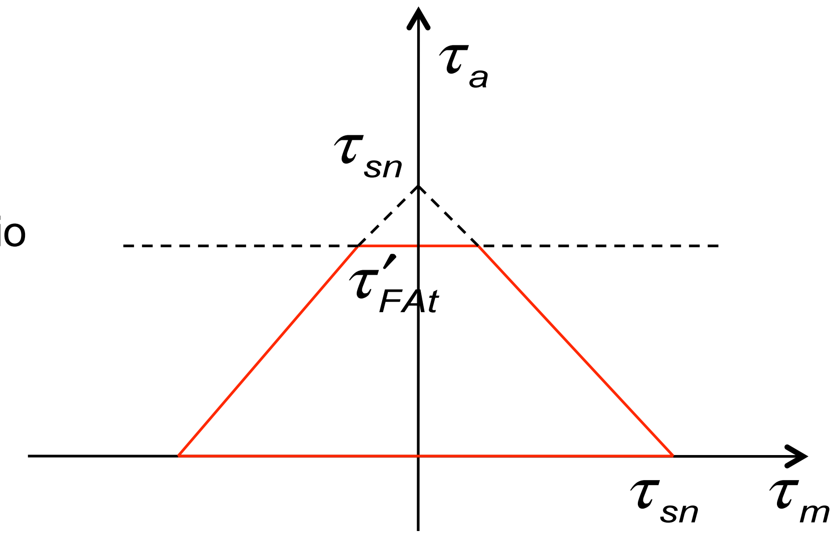
$K :=$ rigidezza della molla;

Le molle: verifica a fatica

Condizione di resistenza:

$$\tau'_{alt} \le \frac{\tau'_{FAt}}{\eta}$$

dove τ'_{Ft} deve essere ricavato
dal diagramma di Haigh a torsione
per tenere conto dell'effetto dello sforzo medio
(considerando fisso lo sforzo medio
perchè il carico medio è fisso)



$$\tau_{FAt} = 0.30\ R_m$$

$$\tau'_{FAt} = \tau_{FAt} b_2 b_3$$

$$\tau_{sn} = \frac{R_m}{\sqrt{3}}$$

Applicazione per il quaderno

Applicazione

Una carrozza ferroviaria di massa M appoggia su due carrelli mediante due molle ad elica cilindrica a sezione circolare per ogni carrello.

Si richiede di:

- scegliere le dimensioni delle 4 molle in acciaio, uguali fra loro, in modo da ottenere una rigidezza complessiva K, nell'ipotesi che il carico sia ugualmente ripartito fra le 4 molle;
- calcolare la freccia, rispetto alla configurazione di molla scarica, tale da non portare a pacco le molle;
- scegliere il materiale tra i 3 proposti, ed eventualmente rivedere il precedente dimensionamento, in modo da garantire, oltre alla verifica di resistenza in condizioni di lavoro, anche la verifica prevista dalla normativa in condizioni di molla a pacco;
- calcolare la forza aggiuntiva che manda a pacco la molla;
- effettuare la verifica a fatica della molla, nella condizione di carico corrispondente a frecce tra 0.75 e 0.45 f_p.

Applicazione

Traccia:

Massa ripartita su ogni molla: $m = \frac{M}{4} = 3725kg$

Rigidezza di ogni molla: $K = \frac{K_t}{4} = 100N/m$

Carico agente su ogni molla: P = mg = 147.1 kN

Ipotizzare un valore iniziale di α, c, d e valutare η e i (=5-6). Una volta scelta la molla, valutare m_p, m_p/m, D, K (rigidezza effettiva: deve essere prossima a 100 N/m), f, f_p, p_o, v, L …

In base a questo primo dimensionamento, si effettua la verifica statica e a fatica, eventualmente iterando il processo.