

Molle

Generalità

Funzione delle molle:

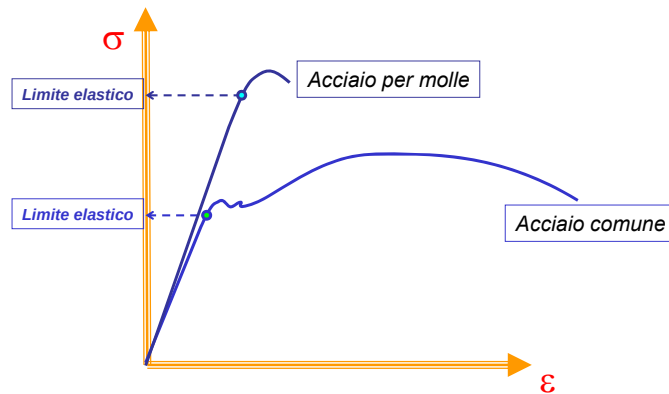
Immagazzinare energia di deformazione in campo elastico
(lineare o non lineare)

- immagazzinare energia da restituire in condizioni prestabilite;
- attenuare urti;
- esercitare carichi continui, contrasti e reazioni;
- meccanismi di richiamo;
- determinare un particolare comportamento dinamico di un sistema;
-

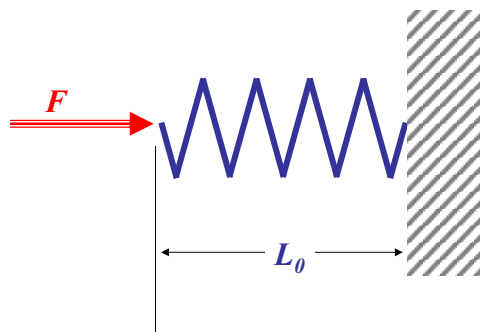
Generalità: materiali

Materiali per la costruzione delle molle:

- acciai ad alto tenore di carbonio
- acciai al silicio
- acciai legati (Cromo-Silicio, Cromo-Vanadio, Silicio-Cromo-Nichel)
- per impieghi particolari si usano anche: acciai inox, leghe Rame-Berillio, ecc.

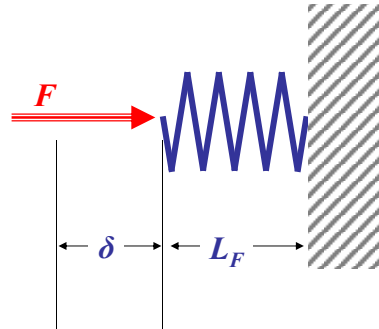


Generalità: rigidità



Generalità: rigidità

CDM - Molle

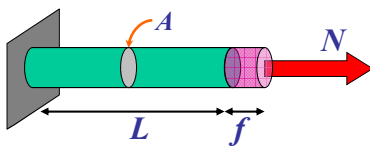


$$F = k\delta$$

Generalità: tipologie ed equazioni fondamentali

CDM - Molle

Molle di trazione:



Relazione
caratteristica
carico-freccia:

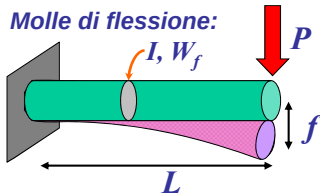
$$N = \frac{EA}{L} f$$

rigidezza k

Relazione
di resistenza:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Molle di flessione:

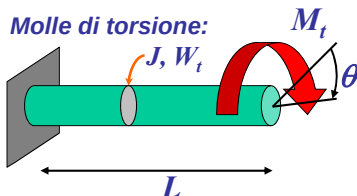


$$P = \frac{3EI}{L^3} f$$

rigidezza k

$$\sigma_{\max} = \frac{PL}{W_f}$$

Molle di torsione:



$$M_t = \frac{GJ}{L} \theta$$

rigidezza k

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$

Architettura delle molle

CDM - Molle

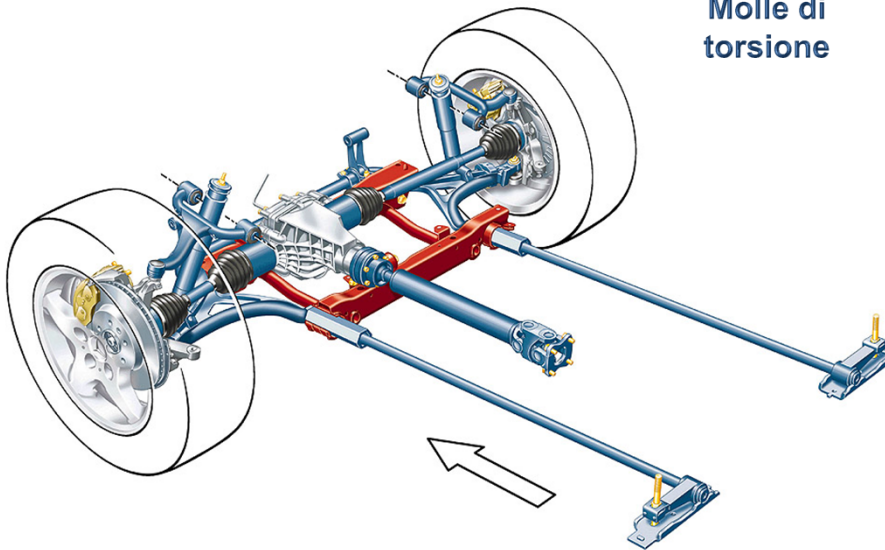
Molle di torsione



Architettura delle molle

CDM - Molle

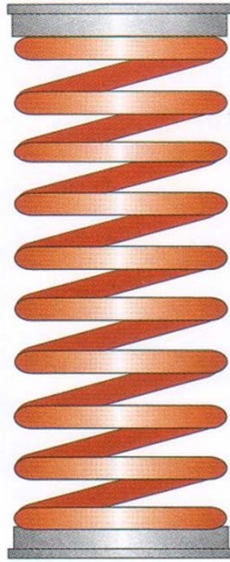
Molle di torsione



Architettura delle molle

CDM - Molle

Molle di
torsione



Architettura delle molle

CDM - Molle

Molle di
torsione



Architettura delle molle

CDM - Molle

Molle di torsione



Architettura delle molle

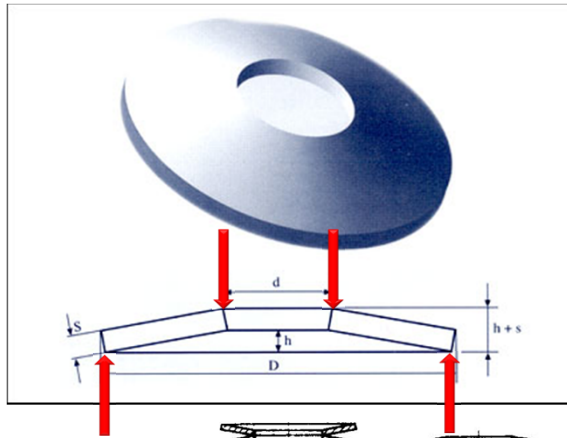
CDM - Molle

Molle di torsione

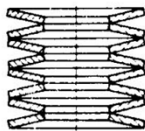


Architettura delle molle

CDM - Molle



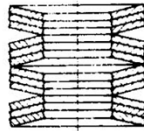
Molle a tazza



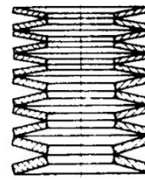
(a)



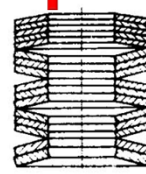
(b)



(c)



(d)



(e)

Architettura delle molle

CDM - Molle

Molle a tazza



Architettura delle molle

CDM - Molle

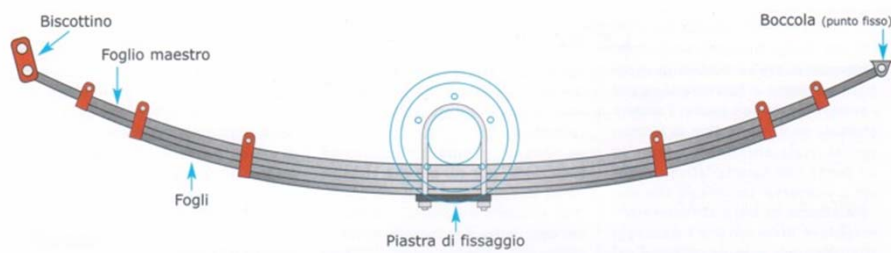
Molle di flessione



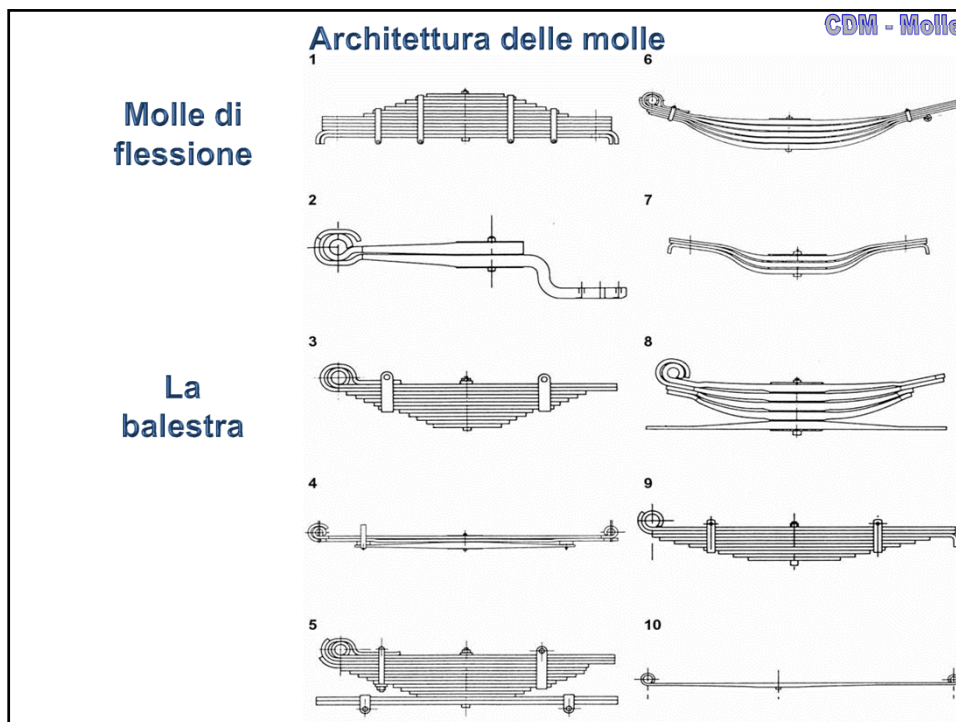
Architettura delle molle

CDM - Molle

Molle di flessione



La balestra



CDM - Molle

Generalità: coefficiente di utilizzo

Si definisce coefficiente di utilizzo C_u il rapporto:

$$C_u = \frac{\text{Energia effettivamente immagazzinata nella molla}}{\text{Energia teoricamente immagazzinabile se tutto il materiale fosse alla } \sigma \text{ massima}} = \frac{\frac{1}{2} P f}{\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V}$$

Molle di trazione:	$C_u = 1$	
Molle di flessione:	$C_u = \frac{1}{9}$	(lamina rettangolare)
Molle di flessione:	$C_u = \frac{1}{3}$	(lamina triangolare)
Molle di torsione:	$C_u = \frac{1}{2}$	(barra cilindrica)

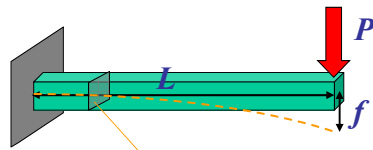
Generalità: coefficiente di utilizzo

Si definisce coefficiente di utilizzo C_u
il rapporto:

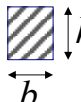
$$C_u = \frac{\text{Energia effettivamente immagazzinata nella molla}}{\text{Energia teoricamente immagazzinabile se tutto il materiale fosse alla } \sigma \text{ massima}} = \frac{\frac{1}{2}Pf}{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}V}$$

Molle di flessione:

Energia effettivamente immagazzinata nella molla:



$$f = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{12PL^3}{3Ebh^3}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$


$$\frac{1}{2}Pf = \frac{1}{2}P \frac{12PL^3}{3Ebh^3} = \frac{12P^2L^3}{6Ebh^3} = \frac{2P^2L^3}{Ebh^3}$$

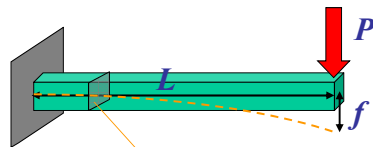
Generalità: coefficiente di utilizzo

Si definisce coefficiente di utilizzo C_u
il rapporto:

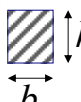
$$C_u = \frac{\text{Energia effettivamente immagazzinata nella molla}}{\text{Energia teoricamente immagazzinabile se tutto il materiale fosse alla } \sigma \text{ massima}} = \frac{\frac{2P^2L^3}{Ebh^3}}{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}V}$$

Molle di flessione:

Energia effettivamente immagazzinata nella molla:



$$f = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{12PL^3}{3Ebh^3}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$


$$\frac{1}{2}Pf = \frac{1}{2}P \frac{12PL^3}{3Ebh^3} = \frac{12P^2L^3}{6Ebh^3} = \frac{2P^2L^3}{Ebh^3}$$

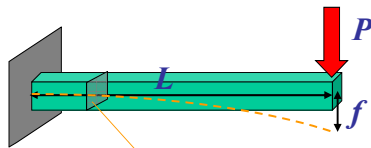
Generalità: coefficiente di utilizzo

Si definisce coefficiente di utilizzo C_u
il rapporto:

$$C_u = \frac{\text{Energia effettivamente immagazzinata nella molla}}{\text{Energia teoricamente immagazzinabile se tutto il materiale fosse alla } \sigma \text{ massima}} = \frac{\frac{2P^2 L^3}{Eb h^3}}{\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V}$$

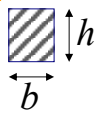
Molle di flessione:

Energia teoricamente immagazzinabile se tutto il materiale fosse alla σ massima



$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_f} = \frac{6PL}{bh^2}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$



$$V = Lbh$$

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V = \frac{Lbh}{2E} \left(\frac{6PL}{bh^2} \right)^2 = \frac{18P^2 L^3}{Eb h^3}$$

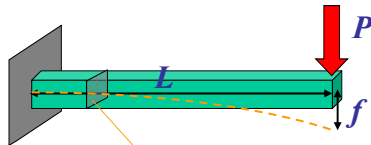
Generalità: coefficiente di utilizzo

Si definisce coefficiente di utilizzo C_u
il rapporto:

$$C_u = \frac{\text{Energia effettivamente immagazzinata nella molla}}{\text{Energia teoricamente immagazzinabile se tutto il materiale fosse alla } \sigma \text{ massima}} = \frac{\frac{2P^2 L^3}{Eb h^3}}{\frac{18P^2 L^3}{Eb h^3}}$$

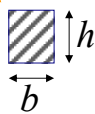
Molle di flessione:

Energia teoricamente immagazzinabile se tutto il materiale fosse alla σ massima



$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_f} = \frac{6PL}{bh^2}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$



$$V = Lbh$$

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V = \frac{Lbh}{2E} \left(\frac{6PL}{bh^2} \right)^2 = \frac{18P^2 L^3}{Eb h^3}$$

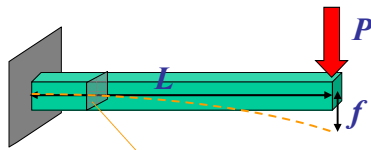
Generalità: coefficiente di utilizzo

Si definisce coefficiente di utilizzo C_u
il rapporto:

$$C_u = \frac{\text{Energia effettivamente immagazzinata nella molla}}{\text{Energia teoricamente immagazzinabile se tutto il materiale fosse alla } \sigma \text{ massima}} = \frac{1}{9}$$

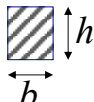
Molle di flessione:

Energia teoricamente immagazzinabile
se tutto il materiale fosse alla σ massima



$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_f} = \frac{6PL}{bh^2}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$V = Lbh$$


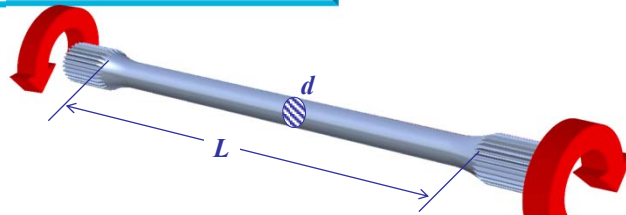
$$\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V = \frac{Lbh}{2E} \left(\frac{6PL}{bh^2} \right)^2 = \frac{18P^2 L^3}{Ebh^3}$$

Progetto di una molla

Variabili in gioco:

- ↗ resistenza statica e/o a fatica
- ↗ rigidità richiesta (relazione carico-freccia)
- ↗ ingombro e peso
- ↗ frequenza propria del sistema
- ↗ instabilità a compressione
- ↗ comportamento non lineare (molle “dure” e “soffici”)
- ↗ smorzamento
- ↗ ...

Molle di torsione ad asse rettilineo: barre di torsione



Relazioni fondamentali:

$$M_t = k\theta \quad \Rightarrow \quad M_t = J \frac{G}{L} \theta = \frac{\pi d^4}{32} \frac{G}{L} \theta = \frac{\pi d^4}{32} \frac{E}{2(1+\nu)L} \theta \quad M_t$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}$$

Una volta scelta la classe del materiale con cui realizzare la barra, che ci vincola il valore di G , le dimensioni d ed L sono fissate sulla base degli ingombri e della rigidezza richiesti utilizzando la relazione carico-freccia.

Segue la verifica a resistenza (statica o a fatica) che viene fatta impiegando gli usuali criteri adottati per il dimensionamento dei componenti meccanici.

Alle molle si applicano, in genere, coefficienti di sicurezza X di poco superiori a 1.

Molle di torsione ad asse non rettilineo: molle elicoidali

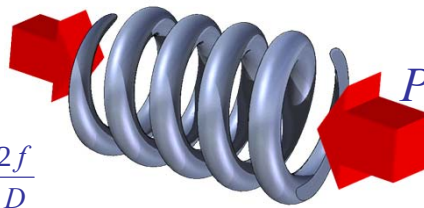
Relazioni fondamentali:

Dalle relazioni valide per le barre di torsione: $M_t = k\theta$

sapendo che:

$$M_t = P \frac{D}{2}, \quad f = \theta \frac{D}{2}, \quad \theta = \frac{2f}{D}$$

$$\text{si ottiene: } \underbrace{P \frac{D}{2}}_{M_t} \cong J \frac{G}{L} \underbrace{\left(\frac{2}{D} f \right)}_{\theta} \rightarrow P \cong \frac{2}{D} J \frac{G}{L} \frac{2}{D} f \rightarrow P = k f$$



$$P \cong \frac{2}{D} J \frac{G}{L} \frac{2}{D} f = \frac{2}{D} \left(\frac{\pi d^4}{32} \frac{G}{L} \right) \frac{2}{D} f = \frac{\pi d^4 G}{8 D^2 L} f = \frac{d^4 E \cos \alpha}{16(1+\nu) n D^3} f$$

in cui:

L è stata posta uguale a $n \pi D / \cos \alpha$

G è stato sostituito con $\frac{E}{2(1+\nu)}$

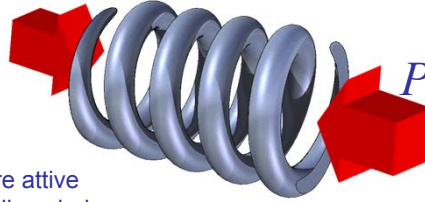
$\begin{cases} n = \text{numero spire attive} \\ D = \text{diametro della spirale} \\ \alpha = \text{angolo della spirale} \end{cases}$

Molle di torsione ad asse non rettilineo: molle elicoidali

Relazioni fondamentali:

$$P = \frac{\pi d^4 G}{8 D^2 L} f = \frac{d^4 E \cos \alpha}{16(1+\nu) n D^3} f$$

$$L = n \pi D / \cos \alpha \quad \begin{cases} n = \text{numero spire attive} \\ D = \text{diametro della spirale} \\ \alpha = \text{angolo della spirale} \end{cases}$$



Si noti che gli effetti dovuti alla curvatura del tondino con cui è costruita la spirale sono stati qui trascurati. Infatti, una molla che abbia il rapporto D/d (detto indice della molla) piccolo risulta avere una rigidità maggiore di quella espressa dalla formula riportata.

Molle di torsione ad asse non rettilineo: molle elicoidali

Relazioni fondamentali:

$$\tau_{\max} \cong \frac{P D / 2}{W_t} + \frac{4}{3} \frac{P}{A / \cos \alpha} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{8 P D}{\pi d^3} + \frac{16 \cos \alpha}{3} \frac{P}{\pi d^2} =$$

$$= \frac{8 P D}{\pi d^3} \left(1 + \frac{2 \cos \alpha}{3} \frac{d}{D} \right)$$

- Il coefficiente $\frac{2}{3} \cos \alpha$ è spesso approssimato a 0,5; in questo modo si tiene conto della ridistribuzione delle tensioni che si ottiene plasticizzando localmente il materiale.
- Anche in questo caso sono stati trascurati gli effetti dovuti alla curvatura della spirale. Infatti, quando una trave curva è sollecitata a torsione il suo lembo interno risulta più sollecitato di quello esterno.
- La concentrazione delle tensioni dovuta alla curvatura dell'elica non può essere trascurata nella progettazione delle molle che lavorano a fatica, per cui la formula precedente deve essere così corretta:

$$\tau_{\max} = \frac{8 P D}{\pi d^3} \left(\frac{4 - d/D}{4(1 - d/D)} + \frac{2 \cos \alpha}{3} \frac{d}{D} \right)$$

Progetto di molle elicoidali

Nel progetto di una molla elicoidale le variabili in gioco sono:

per il materiale:

- E, ν → in genere sono sempre le costanti elastiche dell'acciaio
- σ_L → vale σ_s/X nella progettazione statica (X può essere molto prossimo a 1 specialmente per le molle compresse)
- nel dimensionamento a fatica, $\sigma_{a\ eq}$ e $\sigma_{m\ eq}$ vanno confrontate con la retta di Goodman (nella maggior parte dei casi applicativi b_1 e b_2 possono essere posti uguali ad 1)

per la geometria:

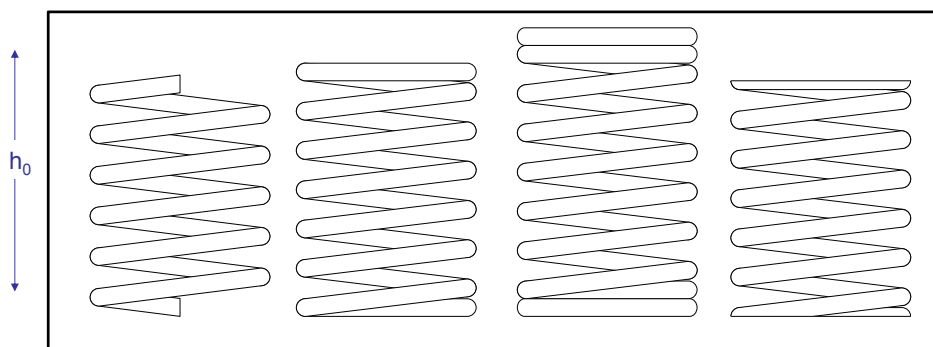
- d, D → il rapporto D/d dovrebbe essere maggiore di 3÷4
- h_0 → l'altezza "libera" è vincolata dai problemi di instabilità a compressione
- h_p → l'altezza "a pacchetto" è data da $n_{tot}d$, dove il numero totale di spire n_{tot} è dato da n (spire attive) più 1 o 2 a seconda del tipo di terminazioni
- α → l'angolo dell'elica è in genere scelto $< 15^\circ$

per i carichi:

- P_{min}, P_{max} → valori del carico agli estremi del campo di lavoro

Progetto di molle elicoidali

Altezza della molla: Lunghezza libera



$$h_0 = n\pi D \tan \alpha$$

$$h_0 = n\pi D \tan \alpha + n_i \cdot d$$

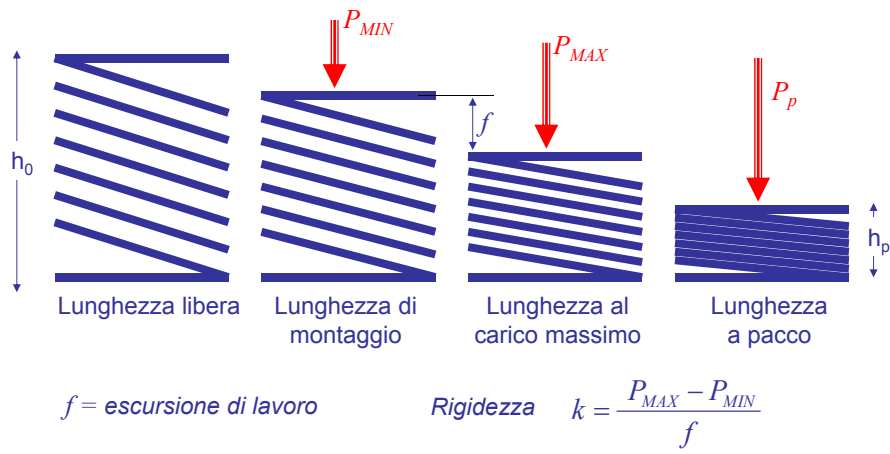
$$h_0 = n\pi D \tan \alpha + 2 \cdot d$$

$$h_0 = n\pi D \tan \alpha + d$$

Progetto di molle elicoidali

CDM - Molle

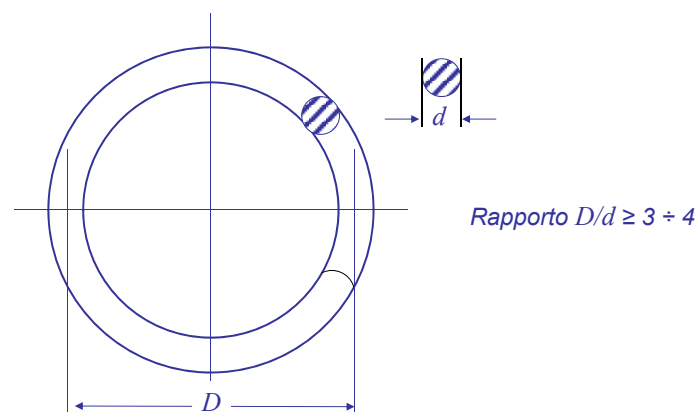
Altezza della molla:



Progetto di molle elicoidali

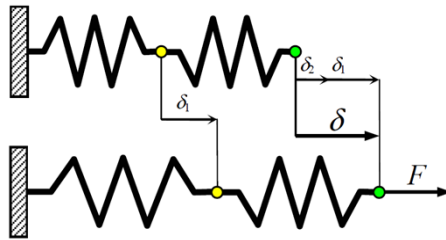
CDM - Molle

Ingombro radiale della molla:



Molle in serie e parallelo

In vari casi le molle vengono utilizzate simultaneamente. Le configurazioni più tipiche sono quelle di molle in serie e parallelo. In questi casi è utile conoscere la relazione tra le rigidezze delle singole molle utilizzate e la rigidezza di molla equivalente dell'insieme.

Molle in SERIE:

$$F = F_1 = F_2$$

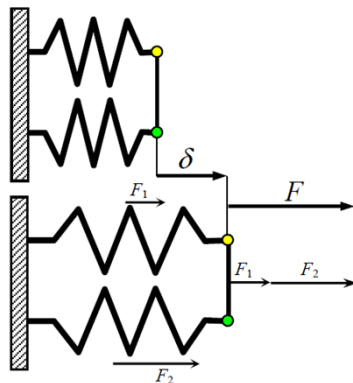
$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

$$K = \frac{1}{\sum \frac{1}{K_i}}$$

$$K = \frac{F}{\delta} = \frac{F}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{F}{F/K_1 + F/K_2} = \frac{1}{1/K_1 + 1/K_2} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

Molle in serie e parallelo

In vari casi le molle vengono utilizzate simultaneamente. Le configurazioni più tipiche sono quelle di molle in serie e parallelo. In questi casi è utile conoscere la relazione tra le rigidezze delle singole molle utilizzate e la rigidezza di molla equivalente dell'insieme.

Molle in PARALLELO:

$$\delta = \delta_1 = \delta_2$$

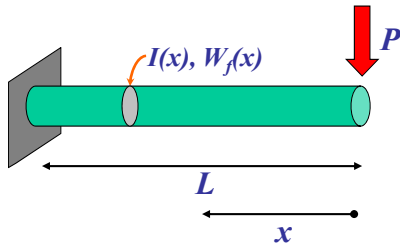
$$F = F_1 + F_2$$

$$K = \frac{F}{\delta} = \frac{F_1 + F_2}{\delta} = \frac{F_1}{\delta} + \frac{F_2}{\delta}$$

$$K = K_1 + K_2$$

$$K = \sum K_i$$

Molle di flessione: balestre



Relazioni fondamentali:

$$P = \frac{3EI}{L^3} f \quad \sigma_{\max} = \frac{PL}{W_f}$$

Poiché le molle di flessione a sezione costante risultano avere un coefficiente di utilizzo molto basso, queste sono in genere realizzate cercando di portare la tensione massima su ciascuna sezione al valore massimo ammissibile.

Quindi, introducendo la coordinata x , potremo ricavare la legge di variazione del modulo di resistenza W_f che porta la $\sigma_{\max}$ di ciascuna sezione al valore massimo ammissibile σ_0 .

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{Px}{W_f(x)} = \sigma_0 = \text{cost}$$

Molle di flessione: balestre

Nel caso tecnicamente più significativo di lamine a sezione rettangolare, avremo:

$$\frac{Px}{\frac{b(x)h^2(x)}{6}} = \sigma_0$$

Indicando con b_0 e h_0 le dimensioni della sezione di incastro:

$$\frac{Px}{\frac{b(x)h^2(x)}{6}} = \sigma_0 = \frac{PL}{\frac{b_0h_0^2}{6}}$$

da cui segue:

$$b(x)h^2(x) = \frac{x}{L}b_0h_0^2$$

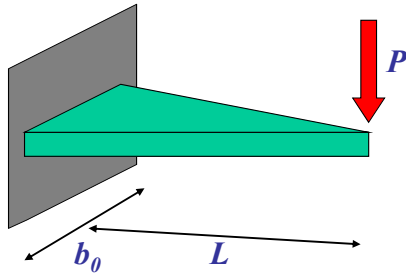
Quindi ipotizzando di voler variare solo b o solo h , la sezione della lamina dovrà seguire una delle seguenti leggi di variazione:

$$b(x) = \frac{x}{L}b_0 \quad , \quad h(x) = h_0\sqrt{\frac{x}{L}}$$

Molle di flessione: balestre

$$b(x) = \frac{x}{L} b_0 \quad , \quad h(x) = h_0 \sqrt{\frac{x}{L}}$$

La prima delle due leggi di variazione porta allo schema di molla di flessione a lamina triangolare:



per la quale valgono le seguenti relazioni fondamentali:

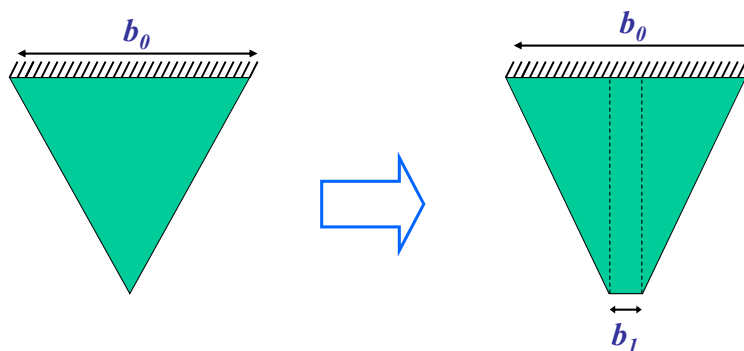
$$P = \frac{E b_0 h_0^3}{6 L^3} f$$

$$\sigma_{\max} = \frac{6 P L}{b_0 h_0^2}$$

$$C_u = \frac{1}{3}$$

Molle di flessione: balestre

Nella pratica costruttiva si passa dalla forma triangolare a quella trapezoidale per rendere possibile l'applicazione del carico all'estremità libera:

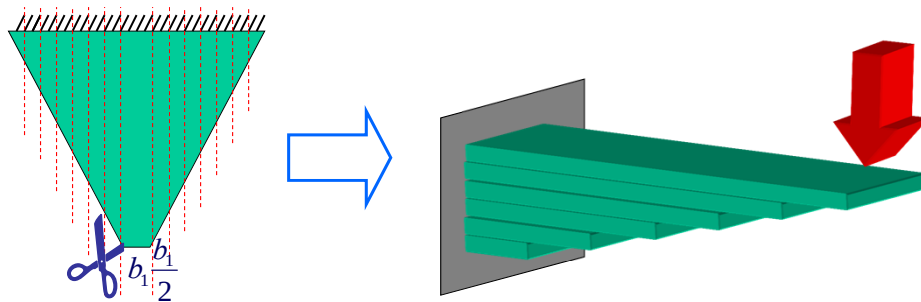


Il valore della rigidità k potrà essere ottenuto (in prima approssimazione) come quello ricavabile dal parallelo di una molla triangolare con una rettangolare:

$$k = k_{tri} + k_{rett} = \frac{E(b_0 - b_1)h_0^3}{6L^3} + \frac{Eb_1h_0^3}{4L^3} = \frac{Eb_0h_0^3}{4L^3} \left(\frac{2 + b_1/b_0}{3} \right)$$

Molle di flessione: balestre

Inoltre le molle di flessione a lamina trapezoidale non vengono realizzate in questa forma, ma sovrapponendo più lamine rettangolari di lunghezza decrescente. Queste si possono pensare ricavate dalla lamina originaria attraverso una serie di tagli longitudinali. Si arriva così alla molla a balestra.



$$K = \frac{Eb_0h_0^3}{4L^3} \left(\frac{2+b_1/b_0}{3} \right)$$

$$\text{con } b_0 = nb_1$$

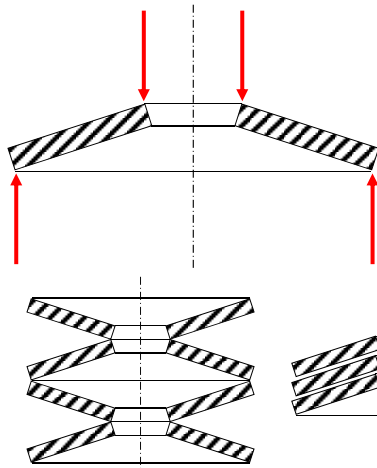
Molle di flessione: balestre

$$b(x) = \frac{x}{L} b_0 \quad , \quad h(x) = h_0 \sqrt{\frac{x}{L}}$$

La seconda delle due leggi di variazione porta allo schema di balestra a spessore variabile:



Molle di flessione: molle a tazza (Belleville)



Disposizione in serie

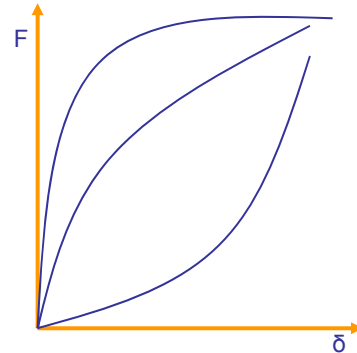
Disposizione in parallelo

(Vanno guidate sull'esterno o sull'interno)

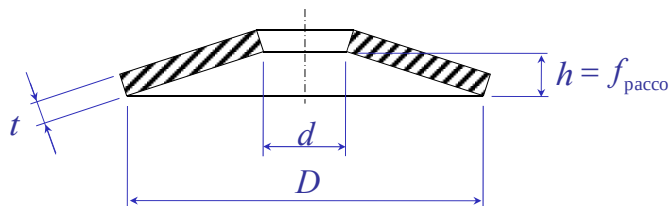
Le molle di flessione possono avere anche forme particolari, come le molle a tazza.

Sono dotate di:

- Elevata rigidezza in spazi contenuti
- Buone proprietà di smorzamento per attrito su superfici di appoggio e tra le stesse molle (se in parallelo)
- Possibilità di avere diversi tipi di caratteristiche, anche non lineari



Molle di flessione: molle a tazza (Belleville)



Relazione forza-freccia: $F = C \frac{tf}{\beta D^2} [(h-f)(h-0.5f) + t^2]$

Forza a pacco ($f=h$): $F^* = C \frac{t^3 h}{\beta D^2}$

Derivando si ottiene la rigidezza:

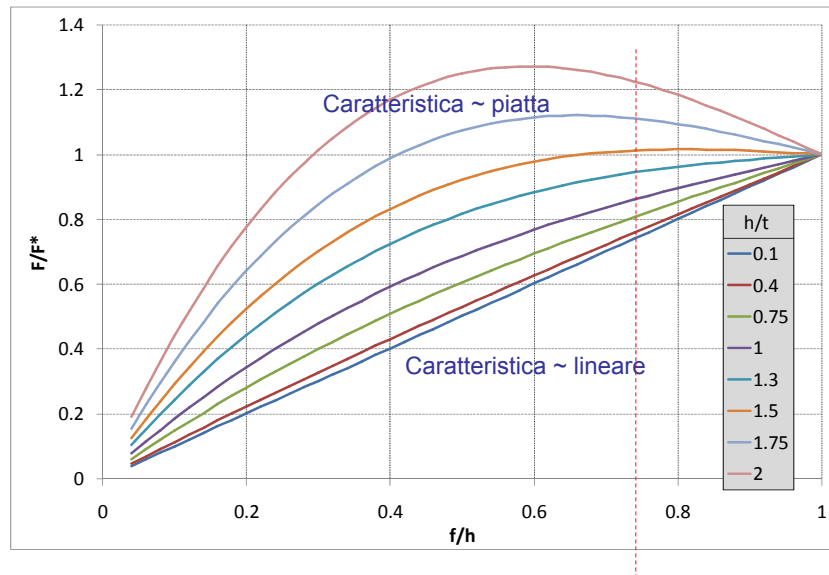
$$K = \frac{dF}{df} = C \frac{t}{\beta D^2} [h^2 - 3hf + 1.5f^2 + t^2]$$

Rigidezza è variabile in f .

Ma per h e f piccoli ($< t$) K è piuttosto costante

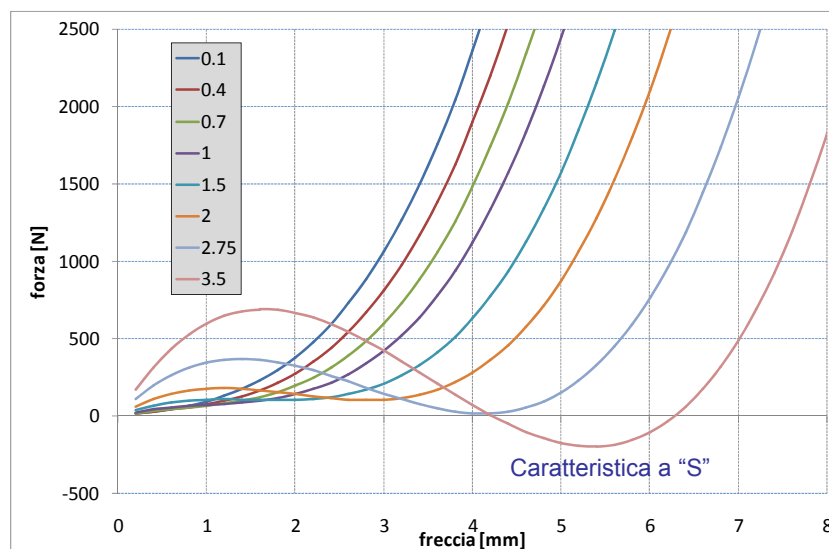
D/d	β
1.2	0.29
1.4	0.45
1.6	0.57
1.8	0.65
2	0.69
2.2	0.73
2.4	0.75

Molle di flessione: molle a tazza (Belleville)

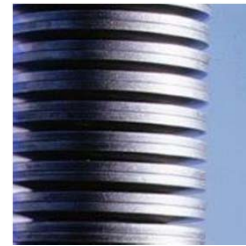


In genere si pone $f_{\max} < 0.75h$ per evitare plasticizzazione

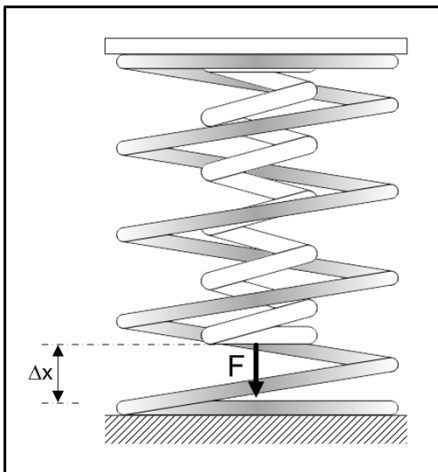
Molle di flessione: molle a tazza (Belleville)



Per $h/t > 2.4$ si ha una curva caratteristica a "S", utile per meccanismi a scatto



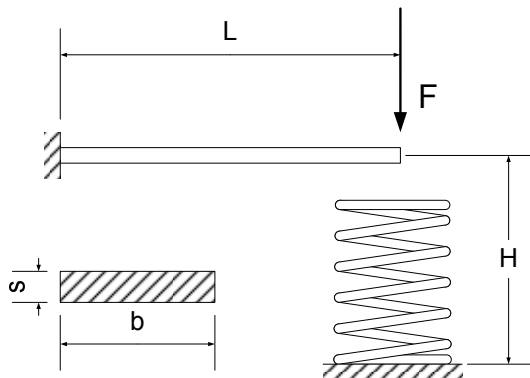
Esercizio: meccanismo di regolazione



Il meccanismo di regolazione rappresentato in figura è costituito da due molle (molla1 esterna e molla 2 interna). Dimensionare la molla interna in modo tale che ad una forza F corrisponda uno spostamento Δx del punto di applicazione della forza. In seguito effettuare la verifica a resistenza delle due molle.

F	160 N
Δx	2 mm
E	200000 MPa
ν	0.3
σ_s	510 MPa
Molla1	
D	50 mm
C	5
α	10°
nt	7
na	5

Esercizio: meccanismo di regolazione



Il meccanismo di regolazione rappresentato schematicamente in figura è costituito da una lamina rettangolare e da una molla elicoidale. Durante il funzionamento viene sollecitata inizialmente la lamina mentre successivamente vengono caricate contemporaneamente la lamina e la molla.

Si chiede di determinare:

1. il massimo abbassamento subito dall'estremità della lamina in seguito all'applicazione di un carico F
2. la tensione massima agente sulla molla.
3. la forza massima prima che la molla arrivi a pacco.

molla	lamina	meccanismo
$n_a = 5$ $L_0 = 95 \text{ mm}$ $\alpha = 10^\circ$ $d = 6 \text{ mm}$ $D/d = 5$	$L = 160 \text{ mm}$ $b = 30 \text{ mm}$ $s = 6 \text{ mm}$ $E = 200 \text{ GPa}$	$F = 1000 \text{ N}$ $H = 100 \text{ mm}$

Esercizio: la molla della penna a sfera

La molla elicoidale del meccanismo di estrazione/ritrazione della punta di una penna a sfera deve soddisfare le seguenti specifiche:

- ▶ carico di azionamento: **$0.5 \text{ N} \pm 20\%$**
- ▶ corsa massima: **7 mm**
- ▶ diametro interno: **$> 3.5 \text{ mm}$**
- ▶ lunghezza totale: **$< 30 \text{ mm}$**

Si completi il progetto della molla scegliendo il materiale e definendo le altre dimensioni in gioco.

*Costruzione
di macchine*

