



 POLITECNICO DI MILANO



Un esempio di una struttura 3D: le molle



La **molla** è un elemento meccanico progettato per sopportare **elevate deformazioni elastiche**, senza rimanere deformato in modo permanente.

Grazie a ciò possono **accumulare molta energia elastica**, per poi cederla quando richiesta.

Applicazioni caratteristiche:

- accumulatore di energia per il comando di piccoli meccanismi;
- dispositivi di attenuazione delle vibrazioni;
- generazione di forze di valore controllato;
- misura di forze;
- realizzazione di sistemi vibranti con frequenza assegnata.



La **curva caratteristica** di una molla è generalmente definita in funzione della forza esterna applicata, P , e dello spostamento del punto di applicazione del carico, la freccia f :

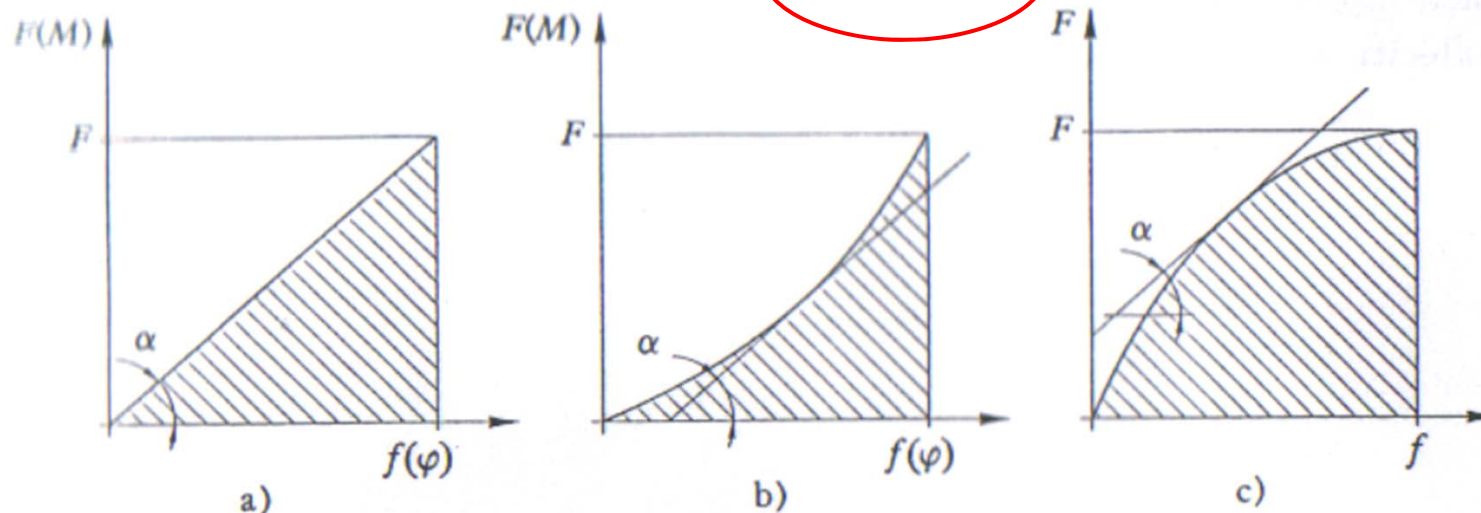
$$P = P(f)$$

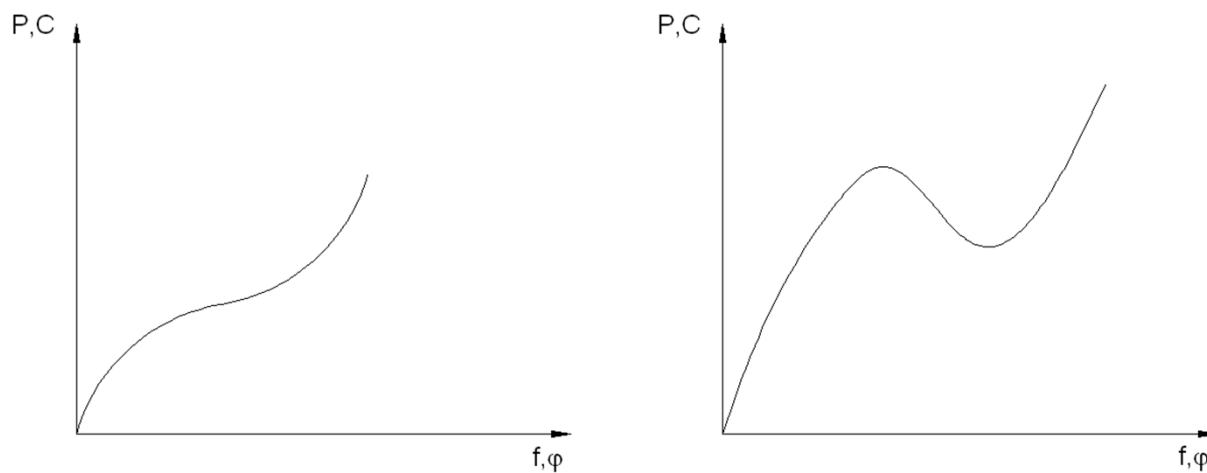
La **rigidezza** della molla è definita come: $K = dP/df$

Lineare
K costante

dura

dolce





molle a caratteristica mista



Classificazione delle Molle

- secondo le **Azioni Interne** prevalenti:
 - molle di **Torsione**,
 - molle di **Flessione**,
 - molle di **Trazione-Compressione**
- secondo la **Forma**:
 - molle (di torsione) ad **Elica Cilindrica**,
 - molle a **Lamina**,
 - molle a **Tazza**;



Parametri Essenziali della molla:

Carico Esterno Applicato:

P **forza**
C **coppia**

Cedimento: **f** **freccia** (spostamento nella direzione della forza P)

φ **rotazione** (della sezione a cui si applica la coppia)



Sono molle in cui il **principale stato di sollecitazione** è appunto quello di **torsione**.

Possono essere suddivise in **due tipi**:

ad asse rettilineo (**barre di torsione**);



avvolte (**ad elica** o altro).





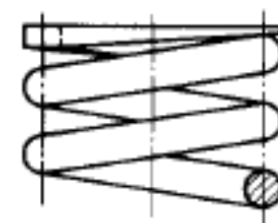
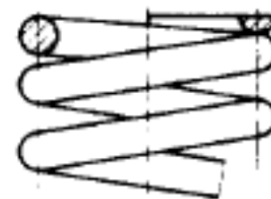
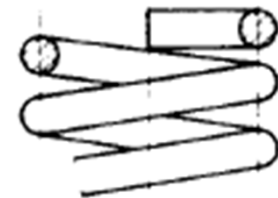
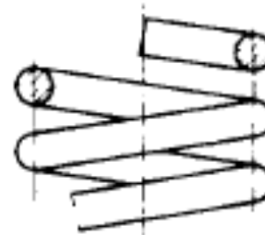


Nelle molle ad elica cilindrica la caratteristica di sollecitazione prevalente per ogni sezione e' il momento torcente.

E' più diffuso il tipo di molla detto a compressione, in quanto il collegamento tra molla ed elementi del meccanismo è molto semplice: le estremità della molla vanno opportunamente lavorate in modo da presentare superfici di estremità piane.

Alcune configurazioni (UNI 7900-1):

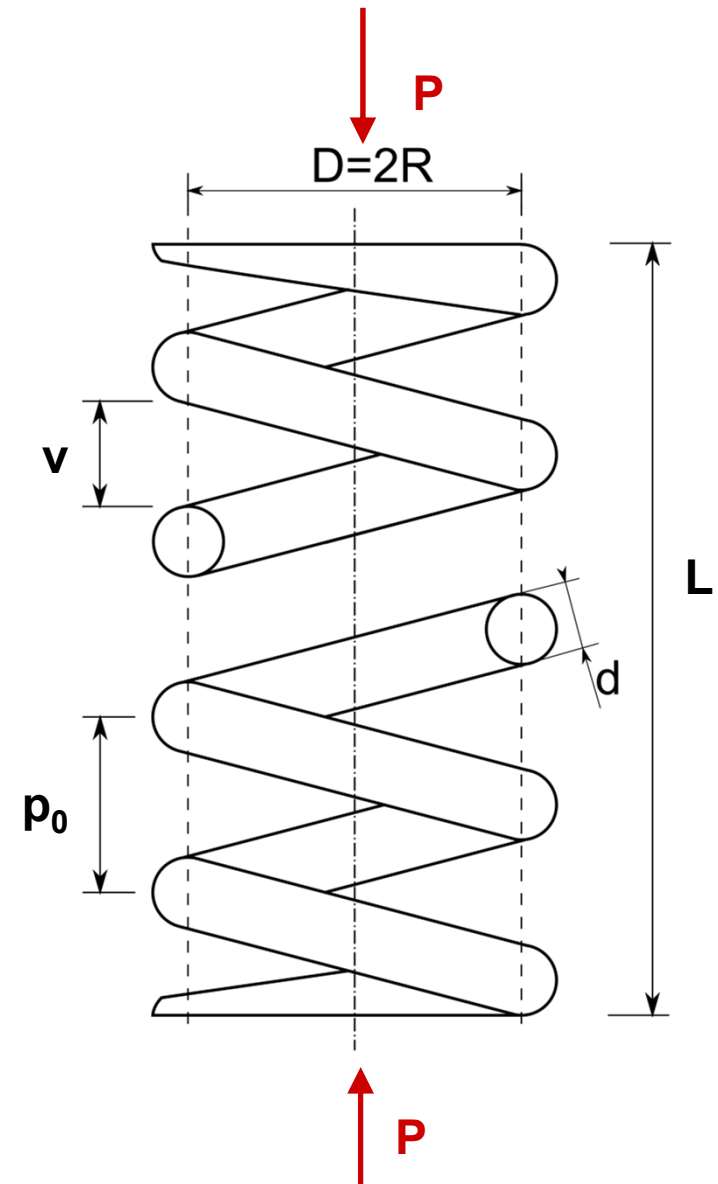
- Aperta
- Chiusa
- Chiusa e molata
- Rastremata, chiusa e molata





Simboli:

- d = diametro del filo della molla
- $D = 2R$ = diametro del cilindro sul quale è avvolto l'asse del filo della molla
- α = angolo di avvolgimento = $5 \div 6^\circ$
- $p_0 = 2\pi R \tan \alpha$ = passo della molla scarica
- P = forza sull'asse della molla
- $v = p_0 - d$ = passo interspira a molla scarica
- i = numero di spire e frazioni di spira attive
- $l = 2\pi R i$ = lunghezza del filo



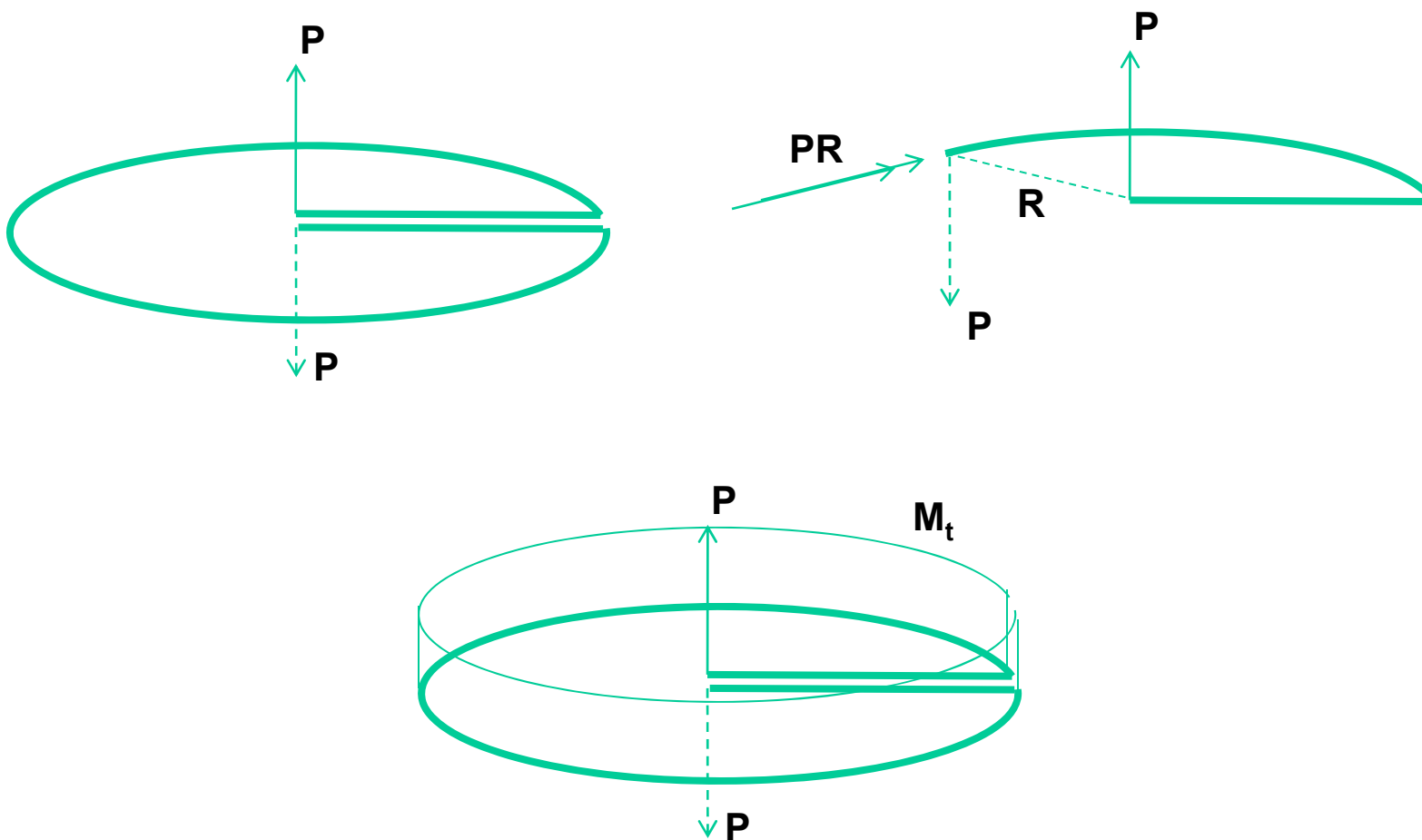


Molle ad elica cilindrica

11

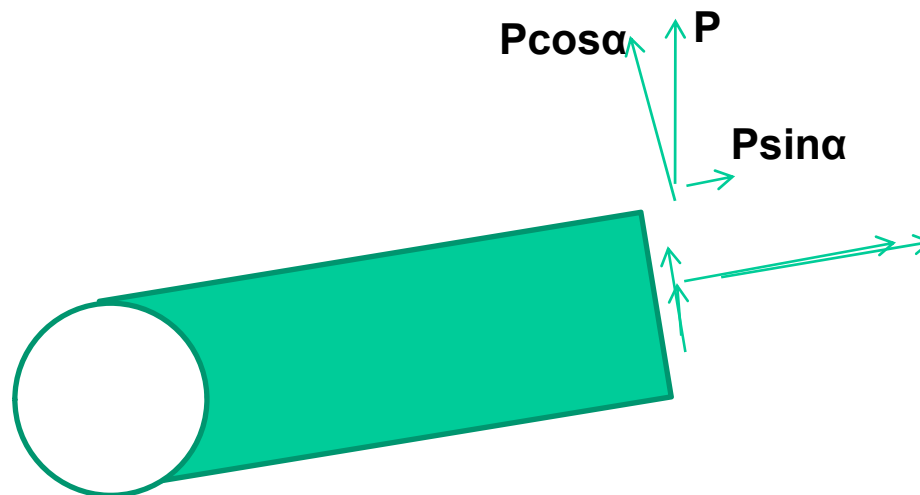
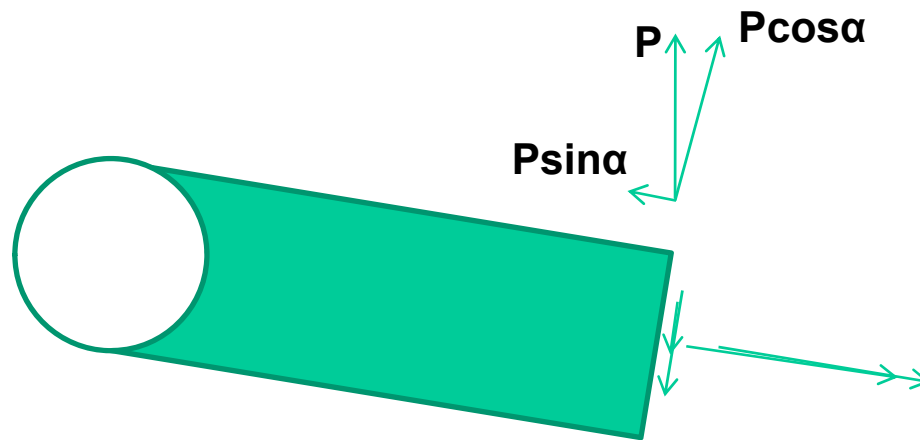
Quali sono le azioni interne?

Supponiamo $\alpha=0$





$\alpha \bar{0}$





$N = P \sin \alpha;$	Azione assiale
$T = P \cos \alpha;$	Taglio
$M_t = PR \cos \alpha;$	Momento torcente
$M_f = PR \sin \alpha;$	Momento flettente

$\alpha :=$ angolo di avvolgimento dell'elica media

1) α in generale piccolo

$$\cos \alpha \approx 1$$

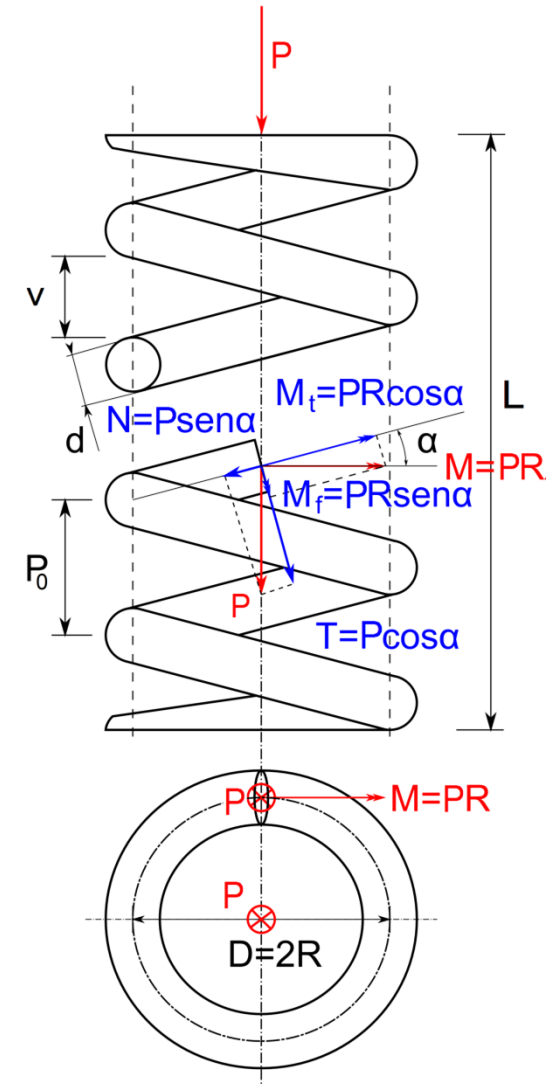
$$\sin \alpha \approx 0$$

$$N = P \sin \alpha \approx 0$$

$$T = P \cos \alpha \approx P$$

$$M_t = PR \cos \alpha \approx PR$$

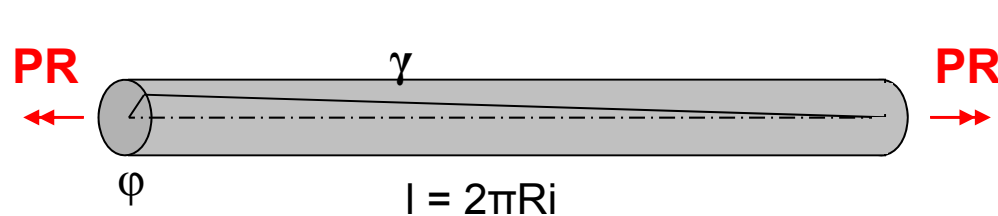
$$M_f = PR \sin \alpha \approx 0$$



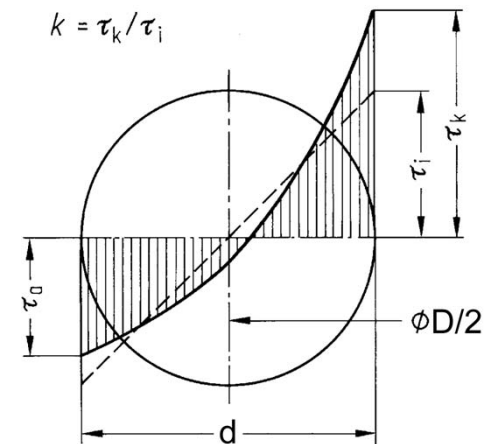


Si definisce rapporto caratteristico $c := D/d$

- 2) Si ipotizza che $c \geq 10$, cioè il filo è piccolo rispetto al diametro di avvolgimento dell'elica (curvatura piccola). In questo modo si può trattare il problema come una barra di torsione.



$$\tau_{\max} = \frac{M_t \cdot d}{2 \cdot J_p} = \frac{M_t \cdot d}{2 \cdot \frac{\pi d^3}{32}} = \frac{16PR}{\pi d^3}$$



γ = scorrimento sulla superficie esterna del cilindro $= \frac{\tau}{G}$

φ = rotazione della sezione di estremità $= \gamma \cdot \frac{2\pi R \cdot i}{\frac{d}{2}} = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{4\pi R \cdot i}{d} = \frac{16PR}{G\pi d^3} \cdot \frac{4\pi R \cdot i}{d} = \frac{16c^2 Pi}{Gd^2}$



Per dimensionare le molle di devono definire le grandezze caratteristiche:

- ✓ Rapporto caratteristico $c=D/d$
- ✓ Numero di spire attive i
- ✓ Rigidezza (freccia)
- ✓ Condizione di massima sollecitazione → **verifica**

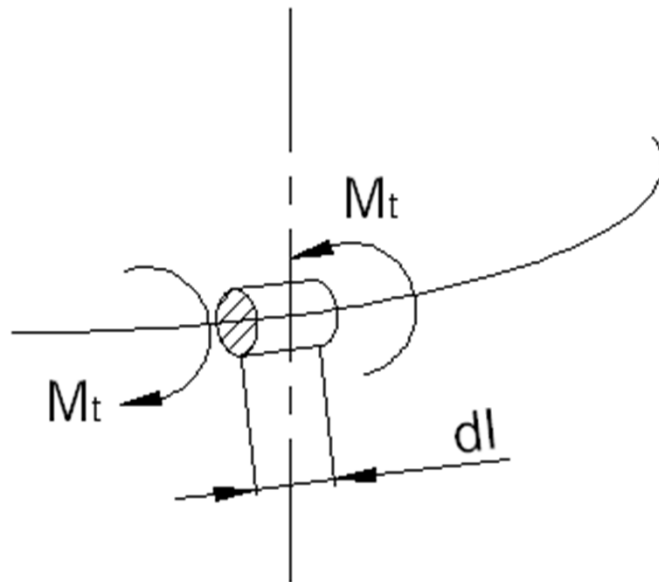
Ipotesi:

- ✓ $c \geq 10$ curvatura trascurabile
- ✓ Comportamento lineare del materiale



Il primo problema è il calcolo della rigidezza.

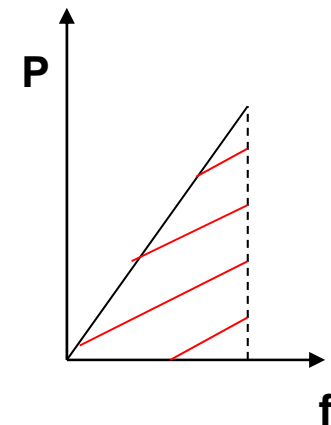
Detto $d\varphi$ l'angolo di rotazione elastica delle sezioni l'una rispetto all'altra e dl la lunghezza dell'elemento infinitesimo, dal bilancio tra il **lavoro** compiuto dalla **forza esterna** e l'**energia elastica** accumulata risulta:



$$\frac{1}{2} P \cdot f = \frac{1}{2} \int_l M_t \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \int_l M_t \frac{M_t \cdot dl}{G \cdot J_P}$$

Le

Li





Ricordando che: $M_t = P \cdot R$

$$\frac{1}{2} P \cdot f = \frac{1}{2} \int_l \frac{P^2 \cdot R^2 \cdot dl}{G \cdot J_P}$$

$$f = \frac{P \cdot R^2}{G \cdot J_P} \int_l dl = \frac{P \cdot R^2}{G \cdot J_P} l = \frac{32 P \cdot R^2}{G \cdot \pi \cdot d^4} l =$$
$$= \frac{32 P \cdot R^2}{G \cdot \pi \cdot d^4} 2\pi R \cdot i = \frac{64 P \cdot R^3}{G \cdot d^4} i$$

$$k = \frac{P}{f} = \frac{G \cdot d^4}{64 \cdot R^3 \cdot i}$$

$$K = \frac{Gd}{8c^3 i}$$

Rigidezza

$$i = \frac{Gd}{8c^3 K}$$

N spire attive

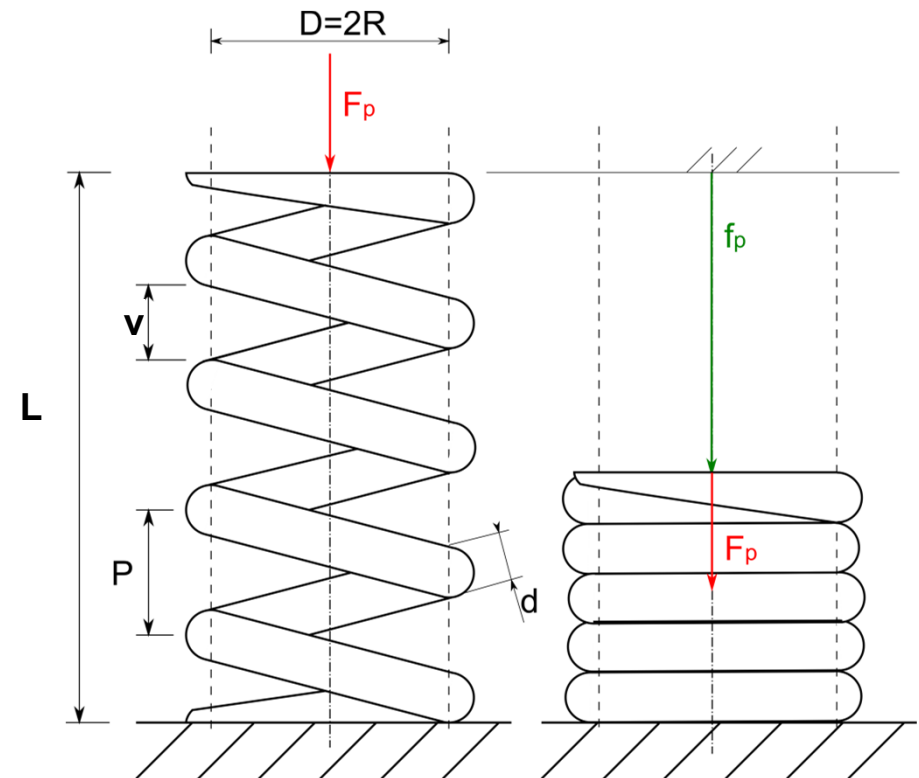


Per un corretto dimensionamento, occorre assicurarsi che per effetto del carico P la molla non vada a pacco: $f_{(m)} \leq f_p$

$$\frac{8c^3i}{Gd} \cdot P < i \cdot v = i \cdot (2\pi R \cdot \tan \alpha - d)$$

$$8c^3mg < (\pi \cdot c \cdot \tan \alpha - 1) \cdot Gd^2$$

$$m < m_p = \frac{(\pi \cdot c \cdot \tan \alpha - 1) \cdot Gd^2}{8g \cdot c^3}$$





Occorre infine tenere conto anche della condizione di resistenza:

$$\frac{\tau_{\text{lim}}}{\tau_{\text{max}(pacco)}} = \eta$$

dove: $\eta > 1.25$ per garantire sicurezza

$\eta < 1.5$ per evitare sovra-dimensionamento

$$\tau_{\text{lim}} = \tau_{sn} = \frac{R_m}{\sqrt{3}}$$

$$\tau_{\text{max}(pacco)} = \frac{16M_{t(pacco)}}{\pi d^3} = \frac{16K \cdot f_p \cdot R}{\pi d^3} = \frac{16 \frac{Gd(\pi c \cdot \tan \alpha - 1)}{8c^3 i} diR}{\pi d^3} = \frac{2GR(\pi c \cdot \tan \alpha - 1)}{\pi c^3 d}$$

$$\tau_{\text{max}(pacco)} = \frac{G(\pi c \cdot \tan \alpha - 1)}{\pi c^2}$$



$$m = \frac{L / V}{Z_{\max}}$$

Attitudine della molla ad utilizzare il materiale che la costituisce rispetto alla distribuzione degli sforzi

L lavoro assorbito dalla molla

$$L = \int_0^f P df = \frac{1}{2} P f = K \frac{f^2}{2}$$

V volume

$Z_{\max}$ Lavoro specifico nel punto di massima sollecitazione

$$Z_{\max} = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sollecitazioni principali nel punto più sollecitato



Lavoro assorbito

$$L = \frac{1}{2} P f = \frac{1}{2} M_t \varphi = \frac{1}{4} \frac{V}{G} \tau_{\max}^2$$

Volume

$$V = \frac{\pi^2 d^2}{2} R i$$

Lavoro specifico

$$\frac{L}{V} = \frac{\tau_{\max}^2}{4G}$$

Lavoro specifico max

$$Z_{\max} = \frac{\tau_{\max}^2}{2G} \quad (\sigma_1 = \tau \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\tau)$$

Coefficiente di ottimizzazione

$$m = \frac{1}{2}$$



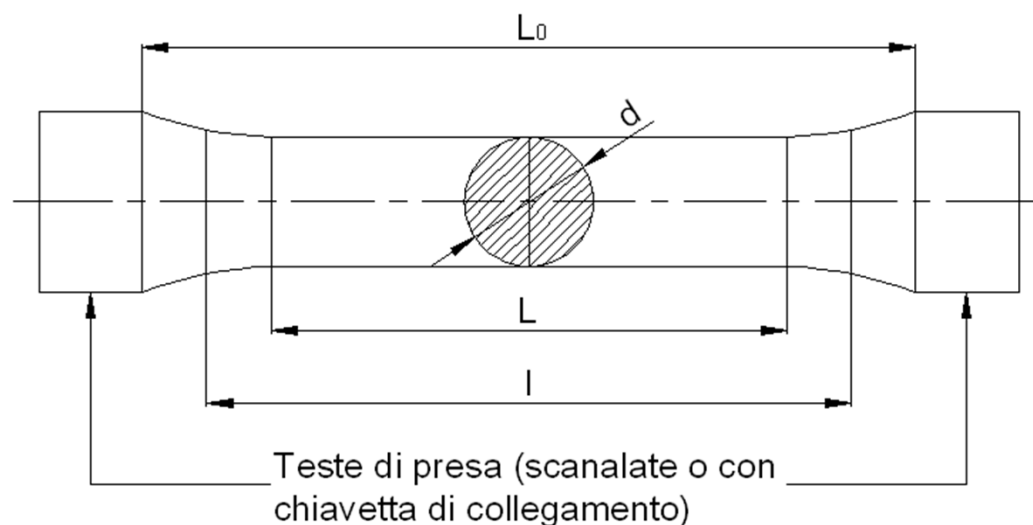
Le molle ad elica cilindrica

22

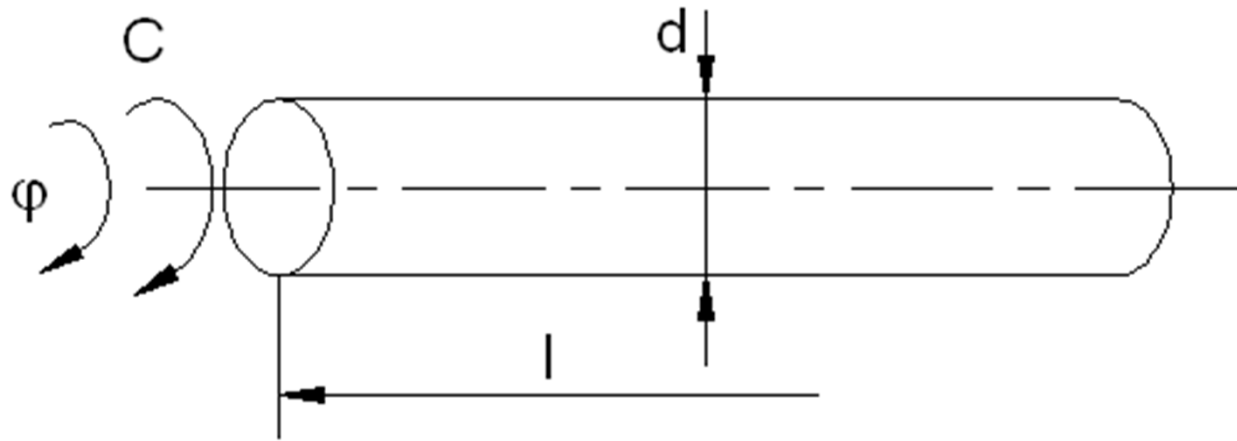




Le barre di torsione sono generalmente a sezione circolare e presentano un fattore di ingombro distribuito prevalentemente nella sola **direzione assiale**



La lunghezza l , detta *lunghezza equivalente*, è funzione di L e di L_0 ed è la grandezza di riferimento per i calcoli in quanto tiene in considerazione la deformabilità delle zone di raccordo e delle teste di presa. Nei calcoli si suppone inoltre che la sezione sia a diametro costante.



$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi \cdot d^3} C$$

$$\varphi \cdot \frac{d}{2} = \gamma_{\max} \cdot l = \frac{\tau_{\max}}{G} \cdot l = \frac{16}{\pi \cdot d^3} C \frac{l}{G}$$

$$\varphi = \frac{32l}{G \cdot \pi \cdot d^4} C$$

La rigidezza della barra: $H = \frac{C}{\varphi} = \frac{G \cdot \pi \cdot d^4}{32l}$



Il **lavoro** assorbito è:

$$L = \frac{1}{2} C \cdot \varphi = \frac{1}{2} C^2 \frac{32l}{G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \cdot d^6}{16^2} \tau_{\max}^2 \frac{32l}{G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{\pi}{16} \frac{d^2 \cdot l}{G} \tau_{\max}^2 = \frac{\frac{\pi \cdot d^2}{4} l}{4G} \tau_{\max}^2$$

Il volume:

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} l$$

$$Z_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\tau_{\max}^2}{G}$$

$$\frac{L}{V} = \frac{\tau_{\max}^2}{4G}$$

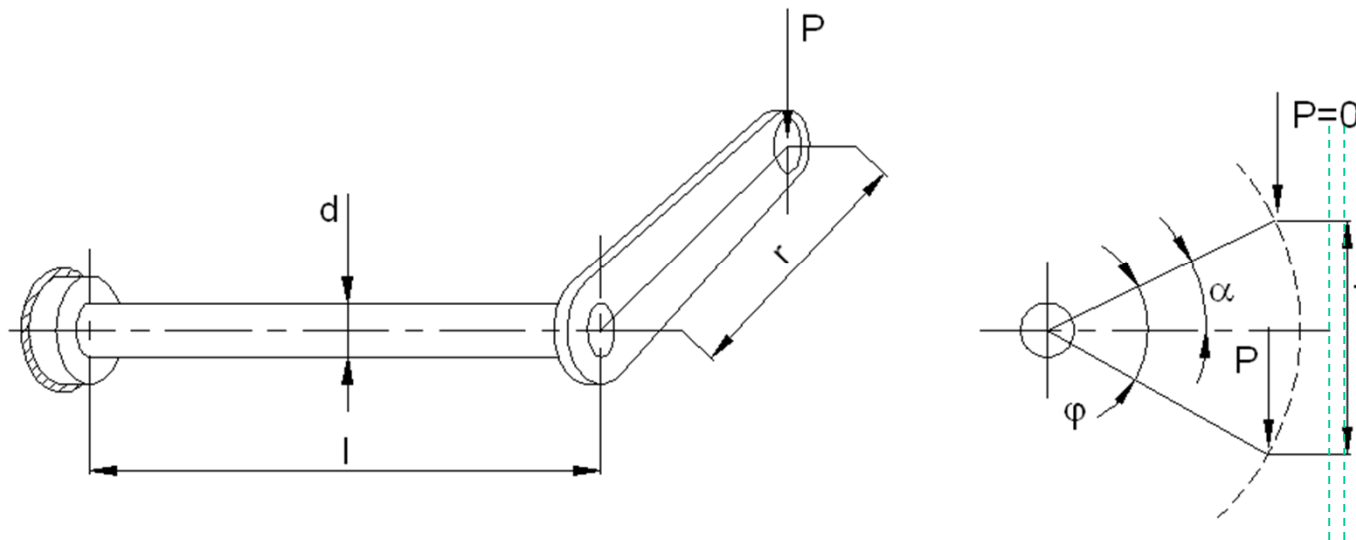
$$m = \frac{1}{2}$$



La barra ha caratteristica **lineare**, ma se la coppia è applicata con una manovella inclinata di un angolo α sulla normale alla direzione di carico.

Per un carico P **generico** la manovella ruota di un angolo φ , cui corrisponde un abbassamento del punto di carico (freccia) f .

$$C = P \cdot r \cdot \cos(\varphi - \alpha)$$





C non aumenta linearmente con il carico P ; assunta H la rigidezza torsionale della barra, φ sarà:

$$\varphi = \frac{C}{H} \quad \text{Rigidezza:} \quad H = \frac{\pi}{32} \frac{d^4 G}{l}$$

$$f = r \cdot \sin \alpha + r \cdot \sin(\varphi - \alpha) = r [\sin \alpha + \sin(\varphi - \alpha)]$$

$$P = \frac{C}{r \cdot \cos(\varphi - \alpha)} = \frac{H \cdot \varphi}{r \cdot \cos(\varphi - \alpha)}$$

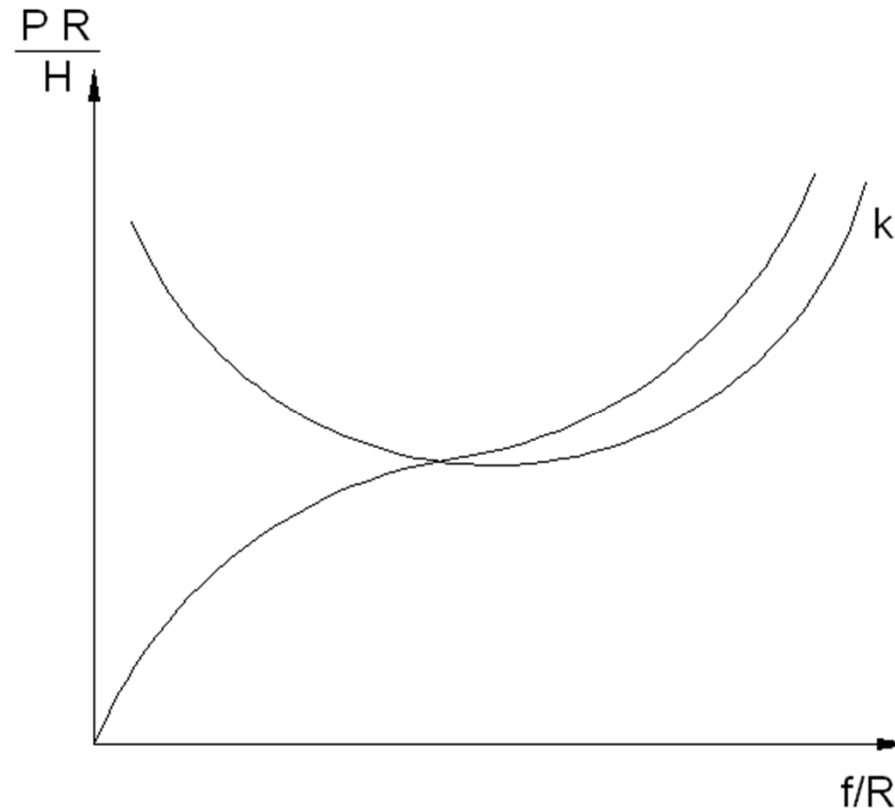
$$K = \frac{dP}{df} = \frac{\frac{dP}{d\varphi}}{\frac{df}{d\varphi}} = \frac{H}{r^2} \frac{1 + \varphi \cdot \operatorname{tg}(\varphi - \alpha)}{\cos^2(\varphi - \alpha)}$$



Le barre di torsione

28

la relazione tra P ed f (la **caratteristica** della barra) **non è lineare**.



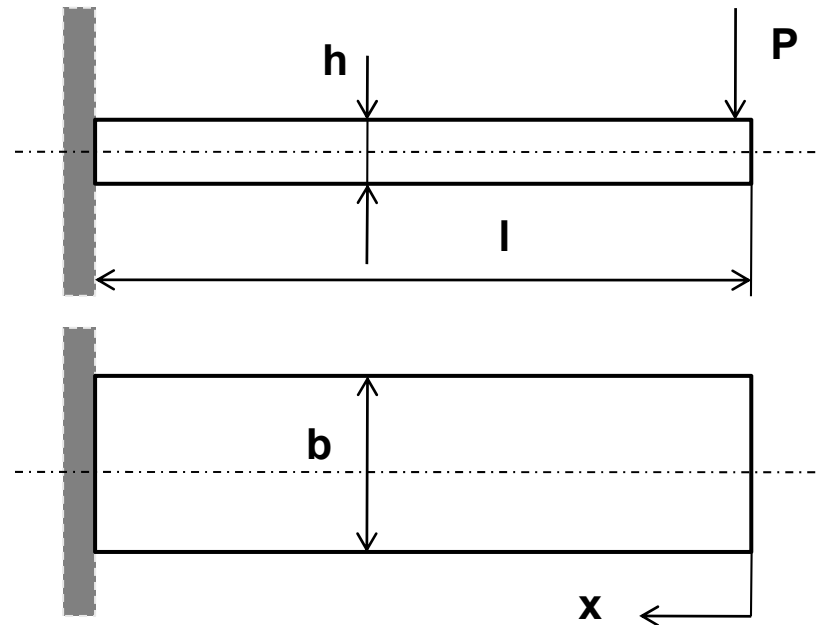
Si avrà una caratteristica della molla inizialmente dolce, che diventerà dura per carichi più elevati.

Inoltre si può notare che per φ tendente a $\pi/2$ (manovella in posizione verticale rivolta verso il basso) la rigidezza k tende a infinito.



- Sono molte usate
- Hanno forme diverse e spesso sono curve. Esistono 3 gruppi:
molle a *Balestra*,
molle a *Spirale*,
molle a *Tazza*.
- Non esiste uno schema di calcolo standard

Caso elementare di
lamina piana rettangolare





$$\sigma_f = \frac{6Px}{bh^2} \quad \text{Sollecitazione di flessione} \quad \sigma_{f_{\max}} = \frac{6Pl}{bh^2} \quad \text{Sollecitazione di flessione massima}$$

Per calcolare la freccia considero ancora l'equilibrio tra L_i (lavoro compiuto dalle forze esterne) e L_d (energia di deformazione elastica immagazzinata)

$$\frac{1}{2}Pf = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \frac{P^2 L^3}{3EI}$$

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{4Pl^3}{Ebh^3} \quad \text{Freccia} \quad \longrightarrow \quad K = \frac{Ebh^3}{4l^3} \quad \text{Rigidezza}$$

$$m = \frac{1}{9}$$

Coefficiente di utilizzo



Teorema di Castigliano: $\frac{\partial U}{\partial F} = f$



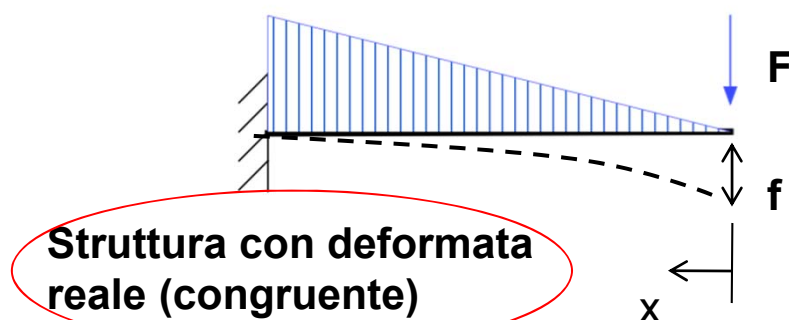
Applichiamo ad una mensola soggetta ad una forza di estremità:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F^2 x^2}{EI} dx = \frac{1}{6} \frac{F^2 l^3}{EI}$$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = f = \frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI}$$



Ad un sistema deformabile in equilibrio è applicato un campo di spostamenti virtuali (spostamenti infinitesimi, conformi ai vincoli, continui e derivabili)



$$M = Fx$$

$$L_{\text{est}} = L_{\text{int}}$$

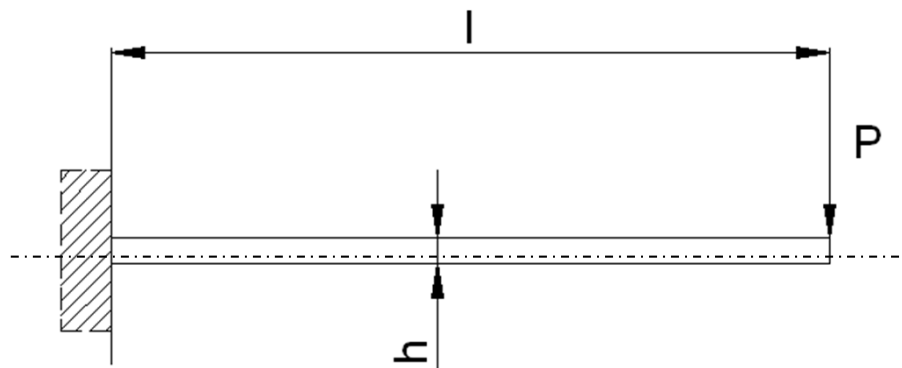
Lavoro esterno $L_{\text{est}} = 1 \cdot f$

$$\text{Lavoro interno } L_{\text{int}} = \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \int_0^l M' d\theta$$

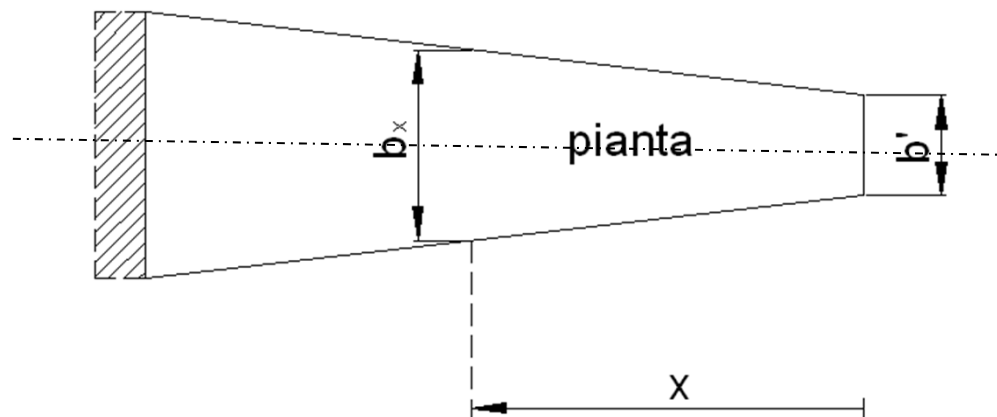
$$1 \cdot f = \int_0^l M' d\theta = \int_0^l 1 \cdot x \frac{Fx}{EI} dx = \frac{Fl^3}{3EI}$$



$$M' = 1x$$



$$b_x = \frac{b - b'}{l} x$$



$$\sigma_x = \frac{6P \cdot x}{b_x \cdot h^2}$$



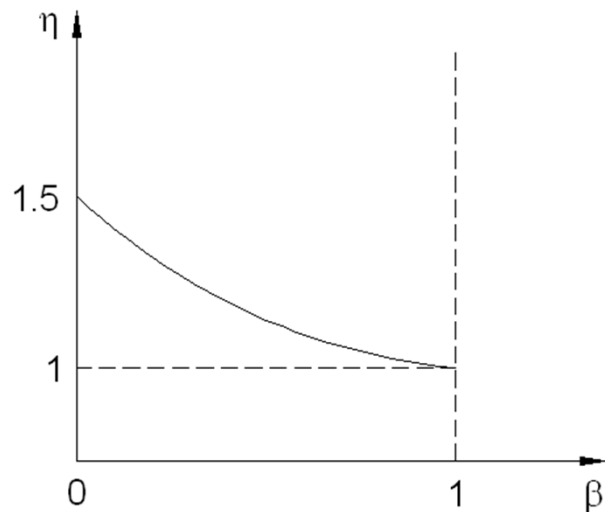
Ipotesi di lamina stretta e piccole deformazioni:

$$\sigma_x = \frac{6P \cdot x}{b_x \cdot h^2}$$

Momento di inerzia: $J_x = \frac{1}{12} b_x \cdot h^3$

Freccia con larghezza costante: $f = \frac{P \cdot l^3}{3E \cdot J} = \frac{4P \cdot l^3}{E \cdot b \cdot h^3}$

Larghezza variabile: $f' = \eta \cdot f \quad (\eta > 1)$



$$\eta \cong \frac{3}{2 + \beta}$$

$$\frac{b'}{b} = \beta = \begin{cases} 1 & \text{per pianta rettangolare} \\ 0 & \text{per pianta triangolare} \end{cases}$$



La lamina a pianta triangolare differisce da quella trapezia per il fatto di avere larghezza b' nulla nell'estremo libero; la quantità b_x diverrà:

$$b_x = \frac{b}{l} x$$

Si avrà allora un coefficiente η pari a 1,5, da cui se ne ricava l'espressione della freccia:

$$f' = 1,5 \frac{4P \cdot l^3}{E \cdot b \cdot h^3}$$

e un'interessante proprietà dello *sforzo flessionale*, che sarà dato da:

$$\sigma_{f \max} = \sigma_{x \max} = \frac{6P \cdot x}{b_x \cdot h^2} = \frac{6l \cdot P \cdot x}{h^2 \cdot b \cdot x} = \frac{6P \cdot l}{b \cdot h^2}$$

ovvero un **valore costante** dello sforzo per tutta la lunghezza della lamina: si dice, infatti, che tale tipo di lamina è una *lamina ad uniforme resistenza*.



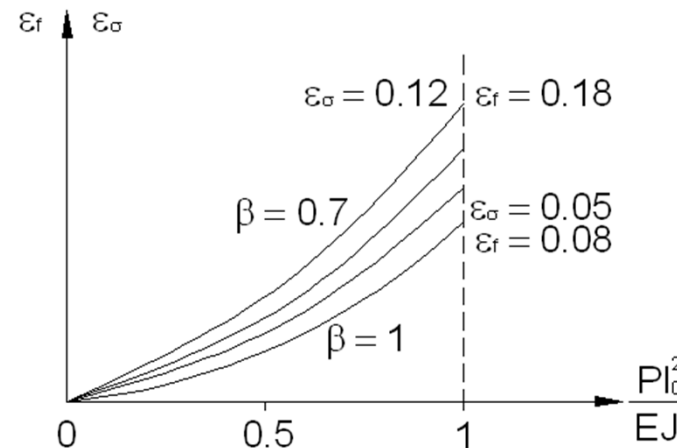
Ipotesi di piccole deformazioni:

$$m = \frac{2\eta}{9(1+\beta)}$$

$$\frac{1}{9} < m < \frac{1}{3}$$

dati dal rapporto β : il valore minore è associato alla lamina a pianta rettangolare ($\beta = 1$), mentre il maggiore vale per la lamina a pianta triangolare ($\beta = 0$).

Al di fuori dell'ipotesi di piccole deformazioni, occorre adottare dei coefficienti correttivi, i cui andamenti sono illustrati in figura:



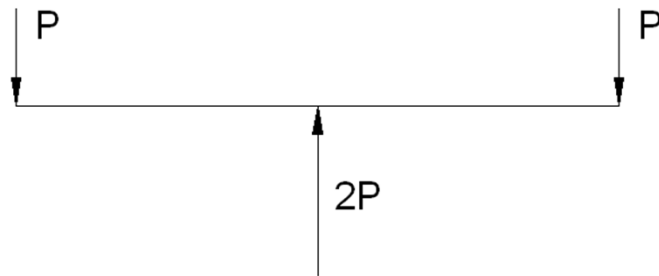
Gli andamenti (non i valori) di ϵ_f ed ϵ_σ sono completamente analoghi. Espressioni corrette:

$$f = \eta \cdot \frac{4P \cdot l^3}{E \cdot b \cdot h^3} \cdot (1 - \epsilon_f)$$

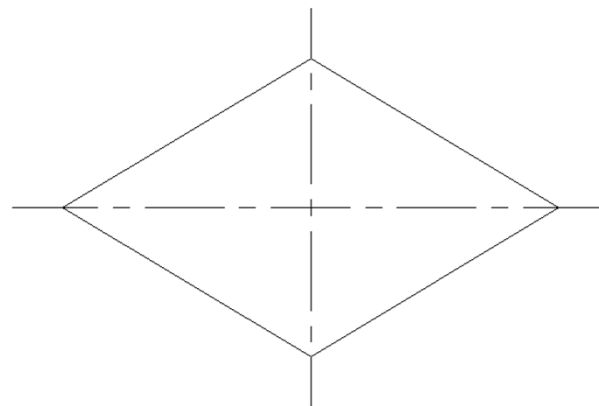
$$\sigma_{f \max} = \frac{6P \cdot l}{b \cdot h^2} \cdot (1 - \epsilon_\sigma)$$



Si cerca una molla che sfrutti in maniera ottimale il materiale, cioè che massimizzi il coefficiente di utilizzo.

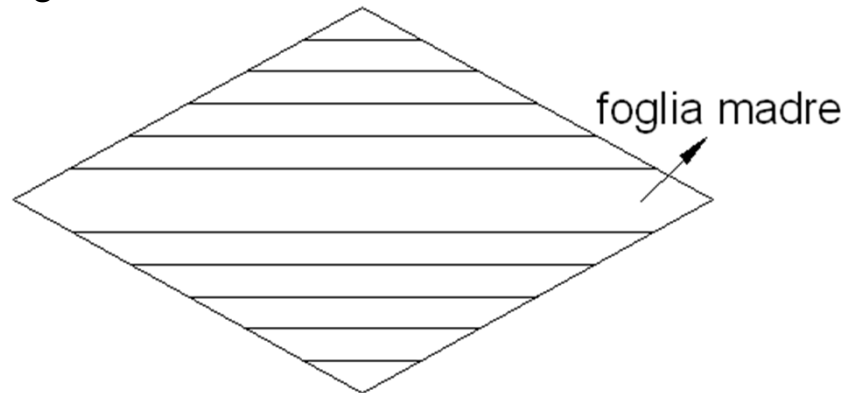


Questo si ottiene facendo corrispondere alle zone con momento flettente più elevato, le sezioni con maggiore momento d'inerzia. L'uso di solidi a uniforme resistenza appare adeguato, per cui la soluzione al problema iniziale può essere data da una lamina con una pianta:

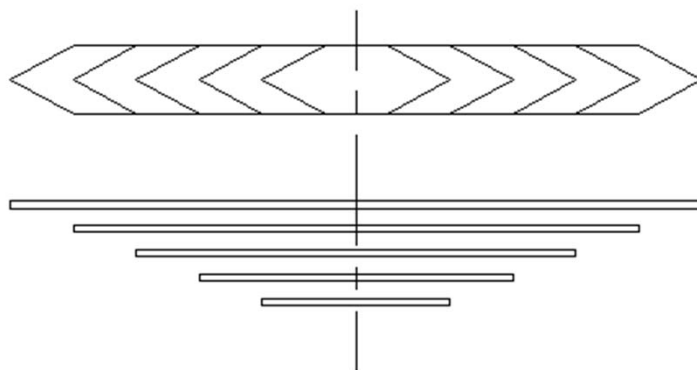




l'ingombro trasversale è rilevante: si suddivide la lamina in tante strisce longitudinali:



Se si collegano tra loro le lamine tramite delle staffe, in modo che tutte abbiano la stessa deformata, come quella della foglia intera, allora la risposta della balestra è pari a quella della lamina.





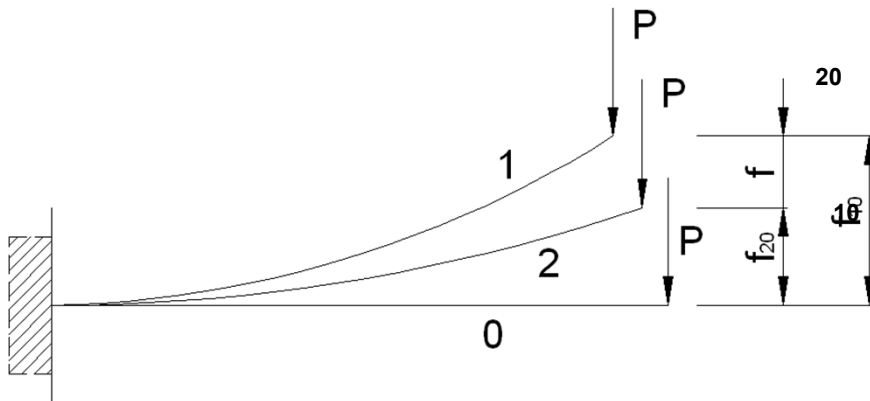
Nella pratica costruttiva occorre realizzare dei “riccioli” (*occhielli*) agli estremi della foglia madre per l’ancoraggio dei perni:



Occorre inoltre partire da una lamina iniziale a doppio trapezio, sicché il carico sul ricciolo possa distribuirsi su un’area adeguata.

Si calcolerà dunque la molla a balestra come se si trattasse di una lamina a doppio trapezio. Le staffe consentono piccolissimi sfregamenti tra foglia e foglia che in teoria non dovrebbero esserci.

Nella realtà invece il vantaggio delle molle a balestra è proprio quello di avere “buoni” sfregamenti senza la presenza delle staffe.



Le lamine sono “pre-deformate” in modo che durante il loro lavoro a regime assumano una configurazione rettilinea.

Conoscendo f_{10} , si può calcolare il carico P_{10} che “spiana” la lamina per successive approssimazioni, da

$$f(P) = f = \eta \cdot \frac{4P \cdot l^3}{E \cdot b \cdot h^3} \cdot (1 - \varepsilon_f)$$

Il procedimento per calcolare la freccia f di una lamina sottoposta ad un generico carico P è retto dalla seguente sequenza:

$$P_{20} = P_{10} - P \quad P_{20} \Rightarrow f_{20}$$

$$f = f_{10} - f_{20}$$

essendo nota la freccia f_{10} , imposta in sede di costruzione, e di conseguenza il carico P_{10} .



Molle a balestra

41

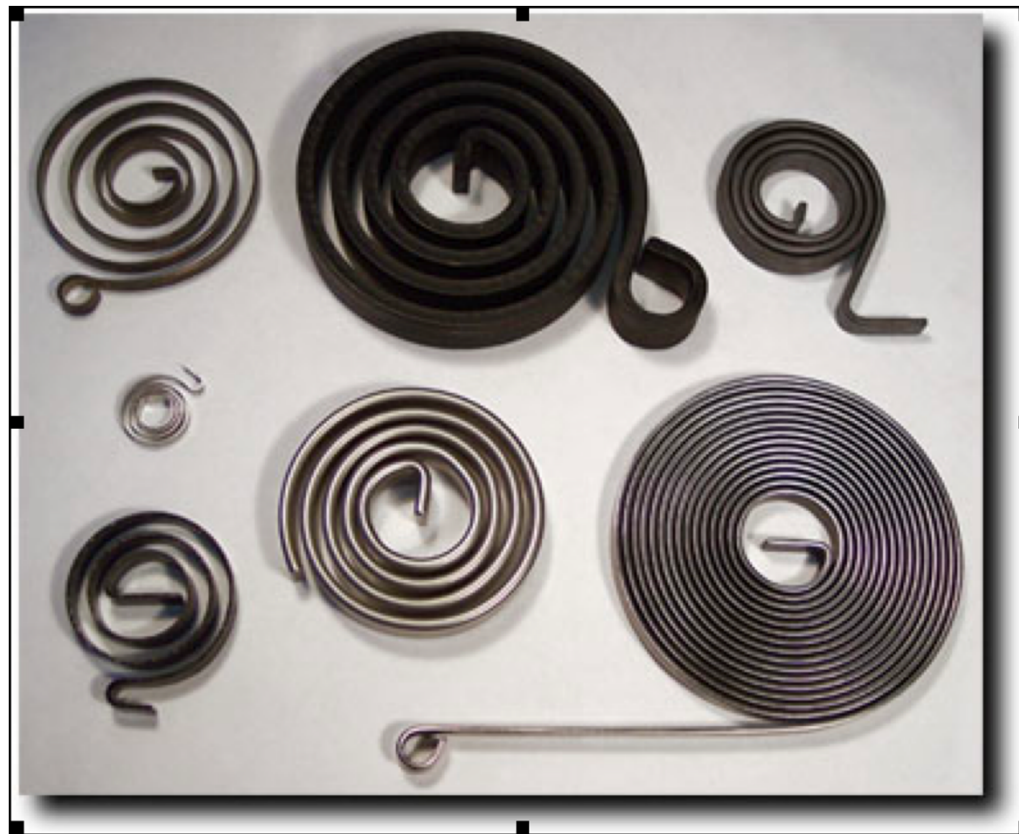




Molle a spirale

42

Sono molle di flessione formate da un elemento elastico il cui asse giace in un piano e si avvolge a spirale.





- ✓ Ha la forma di una rondella di spessore costante leggermente conica
- ✓ I carichi assiali sono distribuiti lungo i bordi interni ed esterni
- ✓ In genere sono usati più elementi contemporaneamente
- ✓ In questo modo si ottengono caratteristiche elastiche molto diverse

